This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

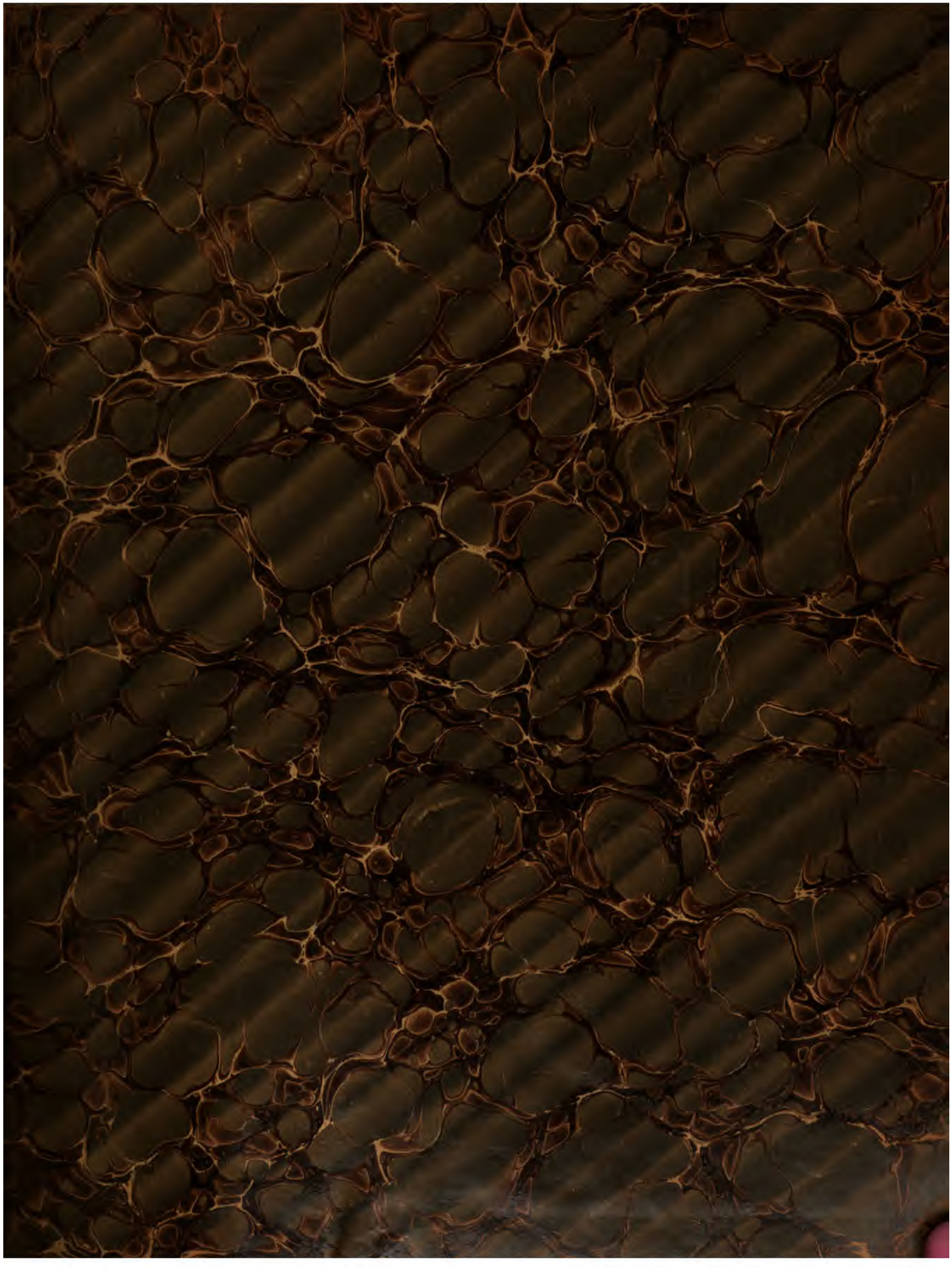
GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
of the Harvard College Library

This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.

Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.

Eng 928.

BOUGHT
FROM
PROF. JOE
AN
ELIZ
"BOOKS IN
MATHEMAT
NATUR
11 A



TRAITÉ D'HYDRAULIQUE.

TRAITÉ
D'HYDRAULIQUE,

PRÉCÉDÉ D'UNE INTRODUCTION
SUR LES PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE,

PAR

(Michel Ignace) Auguste
M. A. GRAËFF,

ANCIEN VICE-PRÉSIDENT DU CONSEIL GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES,
LAURÉAT DE L'INSTITUT.

TOME PREMIER.

PARTIE THÉORIQUE.

PARIS.

IMPRIMERIE NATIONALE.

M DCCC LXXXII.

~~T. 32444~~
Eng 928.82

HARVARD COLLEGE
AUG 11 1887
LIBRARY

Farrar fund.
(I. - ~~III.~~)

PRÉFACE.

L'hydraulique, telle qu'on l'enseigne dans nos écoles d'application, et notamment à l'École des ponts et chaussées, où elle a le plus d'importance eu égard aux applications journalières que les ingénieurs des ponts et chaussées ont à en faire, comprend non seulement l'hydraulique proprement dite, c'est-à-dire *la science de l'équilibre et du mouvement des eaux*, mais encore tout ce qui concerne les fluides élastiques et, de plus, les moteurs hydrauliques. Tout cela est, en général, condensé dans un volume unique et, dès lors, assez imparfaitement développé. On n'y traite véritablement que le seul cas particulier du mouvement permanent ou à débit constant. Quant au mouvement à débit variable, qui est celui des rivières avec lesquelles l'ingénieur est le plus souvent aux prises, il n'y est même pas abordé, et il y a là une lacune évidente à combler. Je n'ai pas la prétention de le faire aujourd'hui, et par mes propres forces; car il y a, à ce point de vue, tout un nouvel édifice à élever : mon unique ambition est d'y apporter une première pierre; d'autres, plus habiles que moi, viendront ensuite compléter l'œuvre. L'étude du régime des eaux offre, du reste, assez d'étendue et assez de difficultés pour qu'elle mérite d'être traitée à part, et tous les ingénieurs qui ont eu à s'en occuper savent quelles difficultés et quelles incertitudes cette matière comporte. Elle embrasse l'écoulement des eaux sous toutes ses formes; chaque mode d'écoulement comporte ses opérations et ses formules, et en employant, pour tel mode, une formule plutôt qu'une autre, ou, pour telle formule, un coefficient plutôt qu'un autre, on peut commettre des erreurs considérables; rien n'est donc plus difficile ici que de calculer juste.

L'hydraulique est, peut-être, la partie la plus délicate de la science de l'ingénieur et certainement une de celles où la théorie laisse le plus à désirer, et, pour jauger des eaux courantes avec tant soit peu d'exactitude, dans telle ou telle circonstance donnée, plus d'un ingénieur a été amené à se faire des formules empiriques. C'est là que nous en sommes, il faut bien le reconnaître, et la théorie est encore très insuffisante, quoique, dans ces derniers temps, elle ait fait d'incontestables progrès, en posant ses opérations fondamentales sur un terrain nouveau.

C'est en Italie que l'hydraulique prit naissance, et l'on peut dire qu'elle y remonte à l'époque romaine par ces chefs-d'œuvre pratiques de conduites d'eau qui pourraient encore servir de modèles aujourd'hui; mais elle n'était alors qu'un art absolument empirique, et c'est du temps de Galilée que date l'impulsion scientifique qui lui a été donnée. En France, ce n'est guère que du règne de Louis XIV, et de la création de l'Académie des sciences due à ce grand prince, que datent les progrès de l'hydraulique; mais les savants français, une fois entrés en scène, ne tardèrent pas à rivaliser avec ceux de l'Italie.

Daniel Bernoulli est le premier qui ait appliqué, dans son *Hydrodynamica*, le principe de la conservation de la force vive d'Huygens à l'écoulement des fluides. D'Alembert, à qui il faut faire remonter l'hypothèse du parallélisme des tranches, produisit une théorie plus exacte que celle de Bernoulli; plus tard, Borda appliqua le principe des forces vives à l'hypothèse du mouvement des fluides par filets indépendants; mais jusque-là rien de sérieux n'avait été produit pour estimer l'influence des frottements. C'est l'ingénieur des ponts et chaussées de Chézy qui constata le premier la proportionnalité de la vitesse à la racine carrée de la pente de superficie dans le régime uniforme, et c'est le chevalier du Buat qui a le premier égalé la composante du poids d'une tranche ayant pour longueur l'unité au frottement extérieur estimé par le produit de l'intensité du frottement, ou frottement sur l'unité de surface, par la surface ayant le périmètre mouillé de la section de la tranche considérée pour une de ses dimensions, et l'unité ou la longueur de la tranche pour l'autre, l'intensité du frottement étant regardée comme à peu près proportionnelle au carré de la vitesse. Les expériences de l'ingénieur des ponts et chaussées

Girard établirent plus tard d'une manière plus nette la loi de la proportionnalité du frottement au périmètre mouillé et au carré de la vitesse. C'est d'ailleurs Prony qui, en coordonnant les expériences de Couplet, Bossut et du Buat, a établi cette formule du mouvement uniforme sur laquelle nous avons tous si longtemps vécu, et c'est Navier qui montra le premier, dans ses belles leçons à l'École des ponts et chaussées, comment le principe des forces vives pouvait s'appliquer à la solution de la plupart des questions du mouvement des fluides. C'est avec l'hypothèse du parallélisme des tranches qu'il a établi ses calculs, et c'est cette hypothèse qui a conduit, il serait injuste de ne pas le reconnaître, aux formules les plus pratiques de l'hydraulique. La tendance actuelle de la science est d'abandonner ces hypothèses pour leur substituer l'étude directe des actions moléculaires. Le travail que les forces sous l'influence desquelles se détermine le mouvement font subir aux particules du corps est le principal objectif de cette méthode nouvelle, dont il faut faire remonter l'origine aux grands travaux analytiques de Cauchy et aux leçons sur l'élasticité de Lamé. MM. de Saint-Venant et Boussinesq sont les géomètres qui ont poussé le plus loin, dans ces derniers temps, l'application de ces méthodes nouvelles aux questions d'hydraulique, et l'*Essai* de M. Boussinesq *sur la théorie des eaux courantes*, inséré aux tomes XXIII et XXIV du recueil des *Savants étrangers*, est certainement une des études les plus complètes qui aient été produites sur cette délicate matière. J'ai, de mon côté, été appelé, par les exigences mêmes des services qui m'avaient été confiés, à étudier d'une manière plus spéciale, et surtout au point de vue de la pratique, le mouvement des eaux à débit variable dans les réservoirs et les rivières, et les résultats de ces études ont été consignés dans trois mémoires insérés au tome XXI des *Savants étrangers*, et auxquels l'Académie des sciences m'a fait l'honneur d'accorder le prix Dalmont de 1873. J'ai d'ailleurs présenté, à la fin de 1876, à l'Académie des sciences, qui en a voté l'insertion au recueil des *Savants étrangers* dans sa séance du 16 mai 1881, un mémoire sur des expériences que j'avais fait faire au réservoir du Furens[1], sur l'écoulement de l'eau par des orifices sous de

[1] Ce mémoire est inséré au tome XXVIII des *Savants étrangers*.

très grandes charges, expériences qui ont confirmé une des déductions importantes de la théorie de M. Boussinesq, à savoir que le coefficient de contraction restait constant pour les grandes charges, ou, pour mieux dire, pour de très grandes valeurs du rapport de la charge à la hauteur d'orifice. L'ensemble des études pratiques auxquelles je me suis plus spécialement livré présente quelques éléments qui pourront au moins servir à guider les ingénieurs dans la question si difficile du mouvement des eaux à débit variable, et à établir quelques points de repère dans cette partie toute nouvelle de l'hydraulique.

Il me reste à ajouter que, lorsqu'un ingénieur a à étudier un cours d'eau pour en appliquer les ressources à l'industrie, à l'irrigation ou à la navigation, ou pour y faire des travaux défensifs contre les inondations, il ne suffit pas qu'il soit parvenu à en faire le jaugeage dans quelques cas particuliers et à établir ainsi quelques jalons de son régime; il faut, le plus souvent, qu'il connaisse ce régime dans tous ses détails et qu'il ait, par conséquent, à sa disposition une série continue de jaugeages qui puisse en réprésenter toutes les variations. On peut, pour le classement de ces jaugeages et pour l'usage à en faire, employer des méthodes plus ou moins exactes, plus ou moins commodes dans les applications. Il est bon d'établir quelques règles sur ce point, que personne n'a, que je sache, traité jusqu'ici, règles que chaque ingénieur est, dans l'état actuel des choses, obligé de se faire, après de longs tâtonnements, par sa propre pratique. Il est bon que ceux qui ont eu, comme moi, l'occasion de faire un grand nombre de ces sortes d'opérations indiquent les résultats de leurs études, ne fût-ce que pour donner à leurs successeurs les moyens de mieux faire.

L'ensemble des méthodes destinées à analyser le mouvement de l'eau est, d'après ce qui vient d'être exposé, une affaire assez importante pour faire l'objet d'un traité spécial, et, rompant avec les anciens errements, j'éliminerai de mon livre tout ce qui concerne les fluides élastiques, ainsi que l'utilisation des fluides pour le jeu des machines. Je ne parlerai donc ni des roues hydrauliques ni des machines à eau ou à air, toutes choses qui sont comprises dans la plupart des traités connus d'hydraulique, au

détriment du principal et véritable sujet, et qui trouveraient plutôt leur place dans un cours de machines. C'est, en définitive, l'hydraulique proprement dite que je compte étudier, en donnant à cette étude toute l'étendue qu'elle me paraît comporter, et je donnerai d'ailleurs, chaque fois que cela me paraîtra nécessaire pour les faire bien comprendre, des applications des formules auxquelles je serai arrivé.

Je ferai précéder mon traité d'une introduction dans laquelle je rappellerai ceux des principes généraux de la mécanique dont j'aurai à faire plus particulièrement application, et je diviserai le traité lui-même en deux sections. La première traitera tout ce qui concerne la partie théorique; la seconde, la partie pratique. Cette seconde section sera ainsi affranchie des recherches purement théoriques et aura surtout pour but de faire, suivant les cas à traiter, un choix entre les formules établies dans la première.

La seconde section (partie pratique) sera subdivisée en deux parties, dont la première traitera du *mouvement permanent* ou à débit constant; la seconde, du mouvement à débit variable, que j'appellerai *mouvement non permanent*. Enfin chacune de ces deux subdivisions de la partie pratique, *mouvement permanent* et *mouvement non permanent*, sera complétée par l'indication des opérations de la pratique qui s'y rapportent et par des applications des principes exposés à des questions de travaux publics, ce qui, tout en élucidant l'emploi des méthodes proposées, leur donnera un intérêt plus direct et rendra la lecture du livre moins aride.

Il me reste à dire quelques mots sur la méthode que je compte employer dans l'étude de la partie théorique de mon travail. Les démonstrations géométriques élémentaires que comporte la cinématique, telle qu'elle est enseignée aujourd'hui, ont le très grand avantage d'être à la portée de tout le monde et de permettre aux esprits les moins cultivés d'aborder les questions de mécanique; mais elles me paraissent très inférieures à la méthode analytique, et je suis de ceux qui pensent que l'analyse seule peut, par ses immenses ressources, conduire, sinon à fixer rigoureusement les lois des phénomènes physiques, du moins à en donner des expressions assez approchées pour qu'on puisse les introduire utile-

ment dans la pratique. L'analyse seule peut d'ailleurs faire comprendre la philosophie des questions, dont la cinématique fait une complète abstraction, et la mécanique analytique restera toujours la seule que l'on puisse présenter aux personnes habituées aux hautes études. Je n'ai donc pas hésité à en adopter les méthodes dans mon introduction; ce sont celles avec lesquelles j'ai été, pour ainsi dire, élevé[1], et auxquelles je me suis toujours très bien trouvé d'être resté fidèle.

L'ouvrage que je présente aujourd'hui aux ingénieurs est le fruit d'un long labeur, rendu souvent très pénible par les exigences du service, qui ne m'ont jamais laissé, deux jours de suite, cette liberté d'esprit qu'il faut avoir pour suivre des études scientifiques. Je n'ai jamais pu y travailler qu'à bâtons rompus, et si je n'avais eu l'idée fixe que ma longue expérience pût avoir quelque utilité pour les ingénieurs, j'aurais reculé devant ces obstacles de chaque instant. Tout ce que je demandais à Dieu, c'était qu'il m'accordât les quelques années qu'il me fallait encore pour mener mon travail à fin. Je comptais d'abord y comprendre le mouvement des fluides élastiques; mais à mesure que j'avançais dans mon étude, je voyais clairement que la question seule du mouvement des fluides incompressibles comportait déjà tant de développements, qu'une certaine confusion se serait nécessairement introduite dans les exposés, et j'ai fini par être convaincu qu'il fallait séparer les deux questions. Je traite aujourd'hui celle des eaux, c'est-à-dire l'hydraulique proprement dite.

J'ajouterai, pour terminer, que, si j'ai cru nécessaire d'exposer, dans mon introduction, ceux des principes généraux de la mécanique dont j'ai eu à faire usage pour l'hydrodynamique, je me suis borné à le faire d'une manière sommaire. C'est une revue méthodique destinée à faire comprendre l'esprit de ces principes plutôt qu'un ensemble rigoureux de démonstrations complètes, pour lesquelles je renvoie aux traités spéciaux de mécanique. J'aurais pu me borner à donner, comme l'ont fait plusieurs auteurs, une simple nomenclature de ces principes, avec leurs énoncés,

[1] De mon temps on n'enseignait pas la cinématique à l'École polytechnique.

et les rappeler ensuite purement et simplement, chaque fois que j'aurais eu à en faire application. Il m'a paru préférable d'entrer, à leur endroit, dans quelques développements susceptibles de les faire bien saisir, afin de dispenser le lecteur de recourir, à chaque instant, aux traités spéciaux, et de lui permettre de trouver, dans l'introduction même de mon livre, tout ce qu'il lui faudra pour comprendre parfaitement tout le reste de l'ouvrage.

TRAITÉ D'HYDRAULIQUE.

INTRODUCTION

OU REVUE DES PRINCIPES GÉNÉRAUX DE MÉCANIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

REVUE DES PRINCIPES GÉNÉRAUX DE STATIQUE.

ARTICLE Ier. — DES FORCES CONSIDÉRÉES AU POINT DE VUE DE LA STATIQUE.

1. *Définition et mesure des forces.* — Si nous ignorons la cause de la gravitation universelle, comme nous ignorons du reste celles de la moindre des merveilles de la création, nous savons du moins, et l'expérience nous le démontre tous les jours, que tout corps matériel est *pesant*. C'est ce fait, incontestablement établi, qui nous donne la première idée des forces, le poids étant la mesure de l'effort qu'il faudrait développer pour détruire l'effet de l'attraction de tout corps matériel vers le centre de la terre. L'unité de poids peut donc devenir, pour nous, l'unité de force.

Toute force résulte, en réalité, de l'action réciproque de deux corps qui tend à modifier leur état de repos ou de mouvement, et chacun de nous porte, en lui, un dynamomètre, dans ses muscles, qu'il est obligé de tendre plus ou moins pour équilibrer ou mettre en mouvement des fardeaux plus ou moins lourds. Nous constatons ainsi que nos forces musculaires peuvent équilibrer des forces extérieures et par conséquent leur servir de mesure. C'est ce qui arrive pour les instruments que l'on nomme dynamomètres; ils se composent en général d'un ressort qui se déforme plus ou moins suivant l'intensité des forces à l'action desquelles il est soumis. Le plus simple de ces instruments est le *peson*, que tout le monde connaît, et que l'on gradue en lui

appliquant des poids donnés. Il peut servir ensuite à mesurer des forces, et donne immédiatement, par les indications de l'aiguille sur le cadran gradué, les poids faisant équilibre aux forces, c'est-à-dire l'expression de ces forces en unités de poids. Nous pouvons donc avec raison adopter le kilogramme comme unité de force. Cette unité n'est d'ailleurs que relative; car on sait que le kilogramme est le poids d'un décimètre cube d'eau distillée ramenée à son maximum de densité, c'est-à-dire à la température de 4 degrés centigrades au-dessus de zéro.

Nous pouvons considérer, par une abstraction de l'esprit, la force évaluée en kilogrammes comme ayant, sur le corps soumis à son action, un point d'application mathématique et agissant suivant une ligne droite rigide déterminée par sa direction. C'est dans cet ordre d'idées, *absolument abstrait*, que se démontrent les propositions principales de la statique.

Dans la nature il n'existe pas de pareilles forces, et celles qu'on y rencontre sont toutes des *forces réparties*, c'est-à-dire agissant sur tout ou partie du volume ou de la surface des corps. L'intensité d'une force répartie se mesure, non plus en kilogrammes d'une manière absolue, mais par le rapport entre la force exprimée en unités de force et le volume ou la surface sur lesquels elle se répartit exprimés en unités de volume ou de surface; de sorte que *l'unité d'intensité d'une force répartie est l'unité de force répartie sur l'unité de volume ou de surface.* Ainsi le poids d'un corps est une force qui se répartit sur son volume, et l'unité de force serait le *kilogramme par mètre cube*, si le mètre cube est pris pour unité de volume. C'est l'unité de poids spécifique, et les poids des différentes espèces de corps se comparent par les poids de leur unité de volume. Il faut remarquer toutefois que, dans les tables qui donnent les poids spécifiques des différents corps, on se sert d'une unité particulière, qui est le poids d'un décimètre cube d'eau ramenée à la température de 4 degrés au-dessus de zéro. Le mètre cube d'eau pesant, à cette température, 1,000 kilogrammes, il s'ensuit qu'il faut multiplier les chiffres donnés dans les tables par 1,000 pour avoir en kilogrammes le poids *du mètre cube* des différents corps auxquels ces tables s'appliquent.

Les pressions et les frottements sont des forces réparties sur des surfaces et dont l'unité d'intensité est le *kilogramme par mètre carré.*

On est conduit, par ce fait que le monde extérieur ne nous présente que des forces réparties sur des volumes ou des surfaces, à admettre qu'une force répartie sur un point serait infinie, et ce n'est, dès lors, que par une véritable abstraction que l'on peut être amené à considérer des forces finies exprimées

en unités de poids comme appliquées à des points et agissant suivant des lignes droites géométriques.

La statique, qui n'opère que sur ces forces abstraites, montre que l'on peut toujours les composer de manière à les remplacer, soit par une force unique, soit par un couple unique, soit par une force et un couple.

Lorsqu'il s'agit de forces réparties, c'est-à-dire des forces réelles que l'on rencontre dans la nature et sur lesquelles doit opérer la mécanique appliquée, on peut toujours trouver une combinaison abstraite de forces et de couples qui soit équivalente à celle de ces forces réelles, et c'est dans cette recherche que se résument la plupart des questions de physique mathématique.

Dans beaucoup d'applications de la mécanique à l'art de l'Ingénieur, la seule force répartie que l'on ait à considérer est le poids des corps ou la force qui les attire vers le centre de la terre; mais tous ces corps sont si petits par rapport à la terre, que l'on peut, sans erreur appréciable, ou du moins, avec des erreurs absolument négligeables dans la pratique, admettre que l'attraction agisse sur les divers points d'un même corps suivant des directions parallèles. Il suit de là que, dans les applications dont il s'agit, on n'aura en général que des forces parallèles à considérer. Or on sait qu'un système de forces parallèles se réduit toujours à une force unique ou à un couple unique. Ce sont donc les applications de la mécanique aux questions de travaux publics qui doivent être, de toutes, les plus simples.

Je ferai remarquer d'ailleurs que, le *centre de gravité d'un corps* étant le point par lequel passe la résultante de toutes les forces parallèles produites par la pesanteur qui agissent sur lui, ce système de forces réparties sur tout son volume peut se remplacer par une force unique appliquée au point mathématique du centre de gravité du corps et égale à son poids total; et, si l'on a un système de corps, il en sera de même pour chacun d'eux, et l'on réalisera ainsi, par une opération des plus simples, l'hypothèse abstraite des systèmes de forces sur lesquels opère la statique.

2. *Pesanteur.* — La pesanteur exerce son action d'une manière constante sur toutes les molécules des corps, quelles que soient la nature et la quantité de matière qui les composent. Une expérience bien connue constate ce fait avec la dernière évidence. Si l'on met dans un tube de verre des matières très différentes, comme des parcelles d'or, de bois, de plumes, et qu'on fasse le vide dans le tube, on voit, si l'on renverse le tube, toutes les parcelles tomber en s'accompagnant, et graviter par conséquent uniformément vers le centre

de la terre, et, si nous avons journellement sous les yeux le spectacle de corps qui tombent plus vite les uns que les autres, cela tient uniquement aux effets de la résistance de l'air, qui est vaincue d'autant plus facilement que les corps contiennent plus de matière sous le même volume, c'est-à-dire qu'ils ont une *densité* plus grande. On doit donc admettre que toutes les molécules d'un corps pesant sont sollicitées vers le centre de la terre par une force élémentaire qui est la même pour toutes. Ainsi qu'on l'a déjà fait remarquer plus haut, toutes ces forces élémentaires peuvent être regardées comme parallèles, et leur résultante est le poids du corps; elle passe par son *centre de gravité*, et sa direction est *la verticale du lieu*.

Le poids d'un corps est absolument invariable *dans un même lieu*, et c'est encore là une raison de choisir, comme on l'a déjà fait plus haut, l'unité de poids pour *unité relative* des forces.

Art. 2. — Composition et décomposition des forces.

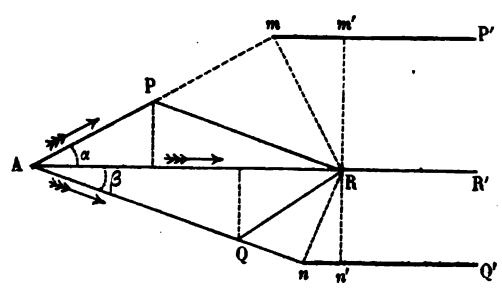
3. *Composition des forces agissant sur la même direction.* — Si l'on porte, sur les lignes suivant lesquelles sont dirigées les forces, des longueurs proportionnelles aux poids qui les mesurent, on ramène la question à représenter une force, en direction et en grandeur, par une ligne droite d'une longueur donnée. L'action d'une force sur un *système rigide* auquel elle est appliquée demeure la même, en quelque point de sa direction qu'elle soit appliquée, pourvu que cette ligne droite soit elle-même rigide et fixée invariablement au système; d'où résulte que, lorsqu'un certain nombre de forces agissent suivant la même ligne d'action en des points différents de cette ligne, on peut toutes les transporter en un même point de la ligne, et alors elles s'ajoutent et se retranchent; leurs expressions en unités de force prennent le signe + ou le signe — suivant qu'elles tirent d'un côté ou de l'autre de ce point, et leur *résultante*, ou la force unique qui, prise en sens contraire, leur ferait équilibre, est égale à leur somme algébrique, les signes étant pris comme il vient d'être dit.

4. *Composition de deux forces concourantes.* — Lorsque les directions de deux forces se rencontrent, leurs intensités sont représentées par deux longueurs portées sur les côtés de l'angle des deux directions, à partir de son sommet, et l'on démontre, en statique élémentaire[1], que leur résultante est

[1] Cette proposition peut d'ailleurs aussi se démontrer par l'analyse.

représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux côtés. Réciproquement, une force donnée peut toujours se décomposer en deux autres dont les directions font avec la sienne des angles donnés.

Fig. 1.



Soient deux forces données P et Q (fig. 1) faisant entre elles un angle $PAQ = \alpha + \beta$, leur résultante R sera représentée par la diagonale AR de leur parallélogramme, et l'on aura, entre ces trois forces et leurs angles, les relations suivantes, α et β étant les angles que les directions des forces P et Q font avec celle de leur résultante R,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\alpha+\beta),$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{Q}{R}, \qquad \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{P}{R}.$$

L'angle $(\alpha+\beta)$ des deux forces étant donné, ces équations fixent la valeur et la direction de leur résultante. La première donnera, en effet, la valeur de R, et les deux autres donneront celles des angles α et β que sa direction fait avec chacune des deux forces. Ces équations montrent que *la direction de la résultante reste la même, pourvu que le rapport des deux forces et leur angle restent constants.*

Réciproquement, étant donnée une force R, ainsi que les angles α et β que doivent faire avec sa direction les deux forces dans lesquelles on veut la décomposer, on pourra immédiatement déterminer ces composantes P et Q, qui auront pour valeurs :

$$P = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad Q = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Il est facile de voir par la figure 1 que, si l'on projetait les forces P et Q sur la direction de leur résultante, on aurait

$$R = P\cos\alpha + Q\cos\beta.$$

La résultante de deux forces concourantes est donc égale à la somme des projections de ces deux forces sur sa direction. On déduit de là, ce qui se voit d'ailleurs par

une construction géométrique des plus simples, que *la projection de la résultante sur une ligne droite quelconque est égale à la somme des projections de ses composantes sur la même ligne.*

On déduirait encore des équations posées plus haut

$$\frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{Q}{\sin\alpha}=\frac{P}{\sin\beta},$$

d'où résulte que *deux forces concourantes et leur résultante ou, ce qui revient au même, trois forces concourantes en équilibre, sont telles que chacune des forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par la direction des deux autres.*

Si les deux forces se rencontraient à angle droit, leur parallélogramme deviendrait un rectangle et l'on aurait

$$\alpha+\beta=90^\circ,$$

$$\beta=90^\circ-\alpha,$$

et les formules précédentes deviennent alors, ainsi que cela résulterait d'ailleurs directement du rectangle,

$$R^2=Q^2+Q^2,$$

$$P=R\cos\alpha,\qquad Q=R\sin\alpha,$$

d'où

$$\frac{Q}{P}=\operatorname{tang}\alpha.$$

Si les directions des deux forces coïncidaient, on aurait, suivant qu'elles agiraient dans le même sens ou en sens contraire,

$$\alpha+\beta=0$$

ou

$$\alpha+\beta=180^\circ,$$

et la valeur générale de R donnée plus haut deviendrait, pour le premier cas,

$$R=P+Q,$$

et, pour le second,

$$R=P-Q.$$

La résultante serait donc égale à la somme ou à la différence des deux forces,

suivant qu'elles tireraient dans le même sens ou en sens contraire, ce qui est d'accord avec ce que nous avons vu au numéro 3.

Dans le premier des deux cas particuliers que nous venons d'examiner, on aurait d'ailleurs

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0,$$

et dans le second

$$\alpha = 180^\circ, \qquad \beta = 0,$$

et les rapports des composantes à la résultante se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.

5. *Composition d'un nombre quelconque de forces concourantes.* — Le théorème du parallélogramme des forces permet de composer un nombre quelconque de forces appliquées au même point en en composant d'abord deux, puis leur résultante avec la troisième, et ainsi de suite de proche en proche; de sorte que la dernière résultante obtenue sera celle de toutes les forces, et si le polygone se ferme, la résultante est nulle et les forces se font équilibre. Le polygone peut d'ailleurs être plan ou non, suivant que les forces sont, ou non, dans le même plan. Il est facile de voir qu'ici, comme pour le cas de deux forces traité plus haut, *la projection de la résultante sur un axe quelconque est encore égale à la somme des projections des composantes sur le même axe,* en d'autres mots, *qu'en projection sur une droite quelconque, la résultante est égale à la somme des composantes.* Ce principe devient ainsi absolument général.

6. *Composition de trois forces rectangulaires.* — Le cas de trois forces dont les directions sont rectangulaires mérite une attention spéciale, car il conduit à estimer les forces au moyen de leurs composantes suivant trois axes rectangulaires des coordonnées auxquels sont déjà rapportés nécessairement leurs points d'application dans le système rigide sur lequel elles agissent. Il est facile de voir, d'après ce qui vient d'être dit au numéro précédent, que trois forces rectangulaires, représentées en grandeur et en direction par trois longueurs portées sur les axes à partir de l'origine, ont pour résultante la diagonale du parallélipipède construit sur ces trois lignes, et, si l'on désigne par X, Y, Z les trois forces agissant suivant les axes des x, des y et des z, par α, β, γ les angles que leur résultante F fait avec ces mêmes axes, on aura, d'après la figure du parallélipipède, les relations suivantes :

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$X = F\cos\alpha, \qquad Y = F\cos\beta, \qquad Z = F\cos\gamma,$$

d'où résulte la condition connue du parallélipipède :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Les trois composantes X, Y, Z de la force F suivant les trois axes ne sont, comme on le voit, autre chose que les projections de la force sur ces axes. Étant donnée une force F, on obtient donc immédiatement ses composantes suivant les trois axes en la multipliant par les cosinus des angles qu'elle forme avec ces axes, et, réciproquement, trois forces rectangulaires X, Y, Z étant données, on obtient immédiatement leur résultante, en grandeur, par la relation

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

et, en direction, par les relations

$$\cos\alpha = \frac{X}{F}, \qquad \cos\beta = \frac{Y}{F}, \qquad \cos\gamma = \frac{Z}{F}.$$

7. *Composition des forces parallèles.* — Si d'un point quelconque de la direction de la résultante de deux forces concourantes (fig. 1) (prenons le point R, pour ne pas compliquer la figure) on abaisse des perpendiculaires R*m*, R*n* sur les directions des deux forces, on aura, d'après les relations géométriques de la figure, par les deux triangles semblables P*m*R et Q*n*R,

$$\frac{Rm}{Rn} = \frac{PR}{QR} = \frac{Q}{P},$$

d'où l'on déduit

$$Rm \times P = Rn \times Q.$$

Le produit d'une force P par la perpendiculaire R*m* abaissée d'un point fixe R sur sa direction est ce qu'on appelle le *moment* de la force par rapport à ce point. C'est la mesure de l'énergie avec laquelle la force tend à faire tourner autour du point fixe le système auquel elle est appliquée. On voit, d'après cette dernière relation, que, si l'on prend les moments de deux forces concourantes par rapport à un point situé sur la direction de leur résultante, ces deux moments sont égaux, ce qui démontre immédiatement *le principe du levier*, dans lequel *les forces sont en raison inverse de leurs distances au point fixe.*

On déduit aussi de là tout ce qui concerne la composition des forces parallèles. Il suffit, pour cela, de supposer que le point de rencontre A des directions des deux forces concourantes s'éloigne à l'infini, celles-ci devenant alors

parallèles à la direction AR (fig. 1) de la résultante. On aura pour ce cas particulier

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0,$$

ou

$$\alpha = 180^\circ, \qquad \beta = 0,$$

et l'équation générale

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\alpha + \beta)$$

donne

$$R = P + Q$$

pour la première combinaison et

$$R = P - Q$$

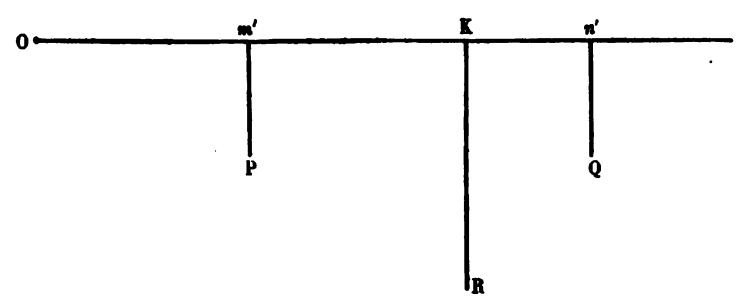
pour la seconde.

La résultante de deux forces parallèles est donc égale à leur somme ou à leur différence suivant qu'elles agissent dans le même sens ou en sens contraire.

Les forces P et Q, devenues parallèles à R par suite de l'éloignement à l'infini du point A (fig. 1), peuvent être considérées comme appliquées maintenant aux extrémités m' et n' de la perpendiculaire $m'n'$ à la direction AR de la résultante, la longueur Rm' étant prise égale à Rm et la longueur Rn' égale à Rn, et le point d'application R de la résultante est fixé sur la ligne $m'n'$ de telle sorte qu'il la divise en parties inversement proportionnelles aux intensités des deux composantes P et Q. *Si donc on considère le système de deux forces parallèles et leur résultante, celle-ci est égale à la somme algébrique des deux composantes et les points d'application des trois forces sur une ligne perpendiculaire à leur direction sont placés de telle sorte que chacune de ces forces est proportionnelle à la partie de cette ligne comprise entre les deux autres forces.*

On déduirait immédiatement de là que, si sur une perpendiculaire $m'n'$

Fig. 2.



(fig. 2) à la direction de deux forces parallèles P et Q on prend les moments

de la résultante et de ses composantes par rapport à un point quelconque O, situé sur cette perpendiculaire, on aura

$$R \times OK = P \times Om' + Q \times On',$$

c'est-à-dire que *le moment de la résultante pris par rapport à un point quelconque d'une ligne perpendiculaire à la direction des forces est égal à la somme des moments des composantes pris par rapport au même point.*

On peut, d'après ce qui vient d'être dit, composer un nombre quelconque de forces parallèles. Il suffit pour cela de déterminer d'abord la résultante de deux de ces forces, de composer ensuite cette résultante avec la troisième force, et ainsi de suite; de sorte que *la résultante finale du système de forces sera égale à la somme algébrique des forces dont les signes seront déterminés par le sens dans lequel elles tirent, et que son point d'application se déterminera par la condition que le moment de cette résultante, pris par rapport à un point quelconque d'une ligne perpendiculaire à la direction des forces, soit égal à la somme des moments de chacune des forces pris par rapport au même point.*

On déduirait immédiatement de là que *l'équilibre d'un système de forces parallèles, en nombre quelconque, exigerait que la somme algébrique des forces fût nulle, ainsi que la somme algébrique de leurs moments par rapport à un point quelconque d'une ligne perpendiculaire à leur direction.*

8. *Des couples et de leur composition.* — La composition de deux forces parallèles et de sens contraire qui donne une résultante égale à leur différence conduit, dans le cas où les deux forces sont égales, à un cas singulier. Dans ce cas, en effet, la résultante R devient nulle. D'un autre côté, le théorème des moments donne, si nous désignons par x_r x_p x_q les distances des forces R, P et Q au point fixe par rapport auquel on prend les moments,

$$Rx_r = Px_p - Qx_q,$$

d'où

$$x_r = \frac{Px_p - Qx_q}{R},$$

d'où l'on déduit, puisque $P = Q$ par hypothèse,

$$x_r = \frac{P(x_p - x_q)}{R},$$

ou, si l désigne la distance entre les forces P et Q,

$$x_r = \frac{Pl}{R}.$$

Cette expression, pour $R = o$, devient infinie. Ainsi, dans le cas de deux forces parallèles égales et de sens contraire, la résultante est nulle et son point d'application placé à l'infini; ou, plutôt, un pareil système, qui constitue ce qu'on appelle *un couple*, n'a pas de résultante. Il semble donc, au premier abord que ce cas singulier ne puisse conduire à rien, et tout le monde sait, cependant, quel immense parti Poinsot à su tirer des couples, dont il a le premier introduit l'usage dans la statique.

Le produit Pl de la force par la distance qui sépare les deux directions des forces égales et contraires du couple ou le produit de la force par le bras de levier *est le moment du couple*. La force étant exprimée en kilogrammes et le bras de levier en mètres, le moment est exprimé en kilogrammètres. Il est la mesure de l'énergie avec laquelle le couple tend à faire tourner le plan dans lequel se trouvent ses deux forces. L'action du couple sur ce plan matériel ne peut être équilibrée par une force unique; c'est une action *sui generis*, qui ne peut être équilibrée que par celle d'un autre couple. Elle tend à faire tourner le plan du couple, tandis qu'une force unique tendrait à le déplacer dans le sens de la direction de cette force. L'action d'une force ne pourrait annuler celle d'un couple que si la force était dans le plan du couple et qu'un point de ce plan devînt fixe; car alors le plan ne pourrait plus prendre de mouvement de translation, et l'action de la force tendrait à le faire tourner autour du point fixe. Cette rotation pourrait, dès lors, détruire celle du couple, pourvu qu'elle eût lieu en sens contraire; l'action du couple serait mesurée par son moment Pl, qui est absolument indépendant du point fixe, et celle de la force par son moment Fl', l' étant sa distance au point fixe, et l'équilibre aurait lieu si l'on avait

$$Pl = Fl',$$

d'où

$$l' = \frac{Pl}{F}.$$

Il suffirait donc, pour faire équilibre au couple, de placer la force à la distance l' du point fixe donnée par cette dernière expression, distance qui serait d'autant plus grande que la force F dont on pourrait disposer serait plus petite.

L'action d'un couple étant de faire tourner son plan autour de tout axe qui serait perpendiculaire à ce plan, il en résulte que l'on peut choisir arbitraire-

ment le point de l'espace par lequel doit passer cet axe. Nous appellerons donc *axe d'un couple* la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque, pris pour origine, sur le plan du couple, et nous supposerons qu'un observateur se place suivant cet axe de manière à regarder le plan du couple. Dans cette position, il verra ce plan tourner dans un certain sens, et, s'il se place ensuite, toujours sur l'axe, mais de l'autre côté du plan du couple, il le verra tourner en sens contraire. Si l'on convient donc de considérer toujours celle des deux parties de l'axe pour laquelle la rotation paraîtra s'exécuter comme celle des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire de gauche à droite, on pourra toujours, un couple étant donné, déterminer le sens ou le signe de sa rotation. Il suit de là qu'un couple est entièrement défini par son intensité mesurée par son moment et par la direction de son axe; de sorte que, si l'on porte sur cette direction une longueur représentant le moment du couple, on est absolument ramené à la représentation graphique des forces que nous avons indiquée plus haut, et le couple résultant de deux couples donnés est, dès lors, représenté par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux lignes représentant les moments et faisant entre elles les angles des axes de ces couples. Les couples se composent donc d'après les mêmes règles que les forces, et, si l'on suppose les axes de trois couples rectangulaires entre eux, le couple résultant sera la diagonale du parallélipipède rectangle construit sur ces trois axes.

Si nous désignons par C_x C_y C_z les trois couples composants dont les axes sont dirigés suivant les trois axes rectangulaires des coordonnées x, y, z, et par λ, μ, γ les angles que l'axe du couple résultant C fait avec ces axes, on aura

$$C^2 = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2,$$

$$C_x = C\cos\lambda, \qquad C_y = C\cos\mu, \qquad C_z = C\cos\gamma.$$

Les couples composants C_x C_y C_z ne sont autre chose que les projections du couple C sur les axes, de sorte qu'ici comme pour les forces, un couple étant donné, on peut immédiatement le décomposer en trois couples rectangulaires, et, réciproquement, trois couples rectangulaires étant donnés, on obtient leur couple résultant, dont la valeur est déterminée par la formule

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2},$$

et la direction par les relations

$$\cos\lambda = \frac{C_x}{C}, \qquad \cos\mu = \frac{C_y}{C}, \qquad \cos\gamma = \frac{C_z}{C}.$$

9. *Moments d'une force.* — Nous n'avons jusqu'ici considéré les moments des forces que par rapport à un point fixe, et le moment a été défini comme étant le produit de la force par la perpendiculaire abaissée du point fixe sur cette force, la rotation autour du point fixe tendant à se faire dans le plan déterminé par ces deux lignes. Considérons maintenant un axe fixe, et voyons quelle sera l'expression du moment d'une force pris par rapport à cet axe. Si la direction de la force est située dans un plan perpendiculaire à l'axe, la rotation autour de l'axe tendra à se faire dans ce plan, et *le moment de la force par rapport à l'axe* sera le produit de la force par sa plus courte distance à l'axe, cette distance n'étant pas autre chose, d'ailleurs, que la longueur de la perpendiculaire abaissée du point d'application de la force sur l'axe. Lorsque la force n'est pas située dans un plan perpendiculaire à l'axe, on peut la décomposer en deux autres, l'une parallèle à l'axe et l'autre située dans un plan perpendiculaire à l'axe, qui n'est autre chose que la projection de la force sur ce plan.

Le moment d'une force par rapport à un axe fixe est donc le produit de la force par sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe, et ce moment est dès lors égal au moment de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe pris par rapport au point où cet axe rencontre le plan de projection.

Ces définitions données, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point d'application de la force F faisant les angles α, β, γ avec les axes rectangulaires des coordonnées et dont les composantes sont $X = F\cos\alpha$, $Y = F\cos\beta$, $Z = F\cos\gamma$, on trouvera facilement les valeurs des couples C_x C_y C_z, qui seraient ici pour la force F

$$C_x = F(y\cos\gamma - z\cos\beta),$$
$$C_y = F(z\cos\alpha - x\cos\gamma),$$
$$C_z = F(x\cos\beta - y\cos\alpha),$$

ou bien

$$C_x = Zy - Yz,$$
$$C_y = Xz - Zx,$$
$$C_z = Yx - Xy.$$

10. *Composition d'un système quelconque de forces.* — Considérons maintenant un nombre quelconque de forces appliquées, en divers points d'un

système matériel rigide. L'une quelconque de ces forces pourra être remplacée par une force parallèle de même intensité et de même sens appliquée à un point arbitrairement choisi dans l'espace, pourvu que ce point soit lui-même invariablement lié au système rigide considéré, et par un couple dont l'une des forces sera la force donnée et l'autre une force parallèle égale et de sens contraire à cette force et appliquée au point arbitraire dont il vient d'être parlé; cela se démontre immédiatement en appliquant à ce point deux forces égales à la force donnée et de sens contraire, ce qui ne change pas les conditions du système, puisque ces deux forces se détruisent.

Si l'on applique la transformation que nous venons d'indiquer à toutes les forces agissant sur le système, elles seront remplacées par ces mêmes forces transportées toutes parallèlement à elles-mêmes au point arbitraire et par un nombre égal de couples. On aura, dès lors, un système de forces concourantes en ce point et un système de couples dont les axes se rencontreront en ce même point, et l'on arrivera facilement, en employant les procédés de composition établis pour ces deux cas dans ce qui précède, à une résultante unique des forces et à un couple résultant unique des couples. Tout cela se simplifie d'ailleurs beaucoup en prenant le point arbitraire pour origine des coordonnées rectangulaires et en décomposant chaque force et chaque couple suivant les trois axes des x, y, z; les résultantes partielles des forces suivant les axes sont, dans ce cas, la somme algébrique des composantes suivant les mêmes axes, les signes des composantes étant déterminés par leurs directions sur les axes, par rapport à l'origine. Il en est de même des couples résultants partiels, qui seraient la somme des couples composants partiels, les signes de ceux-ci étant déterminés, comme on l'a expliqué plus haut (n° 8), par le sens de la rotation autour des axes considérés par rapport à la même origine. Il suffit ensuite de composer ces résultantes et ces couples résultants partiels pour avoir la *résultante totale* et le *couple résultant total*. Désignons par R_x, R_y, R_z les résultantes partielles des composantes X, Y, Z suivant les axes des x, y, z des forces F, et par M_x, M_y, M_z les moments résultants partiels des moments des couples composants suivant les mêmes axes, nous aurons, en désignant par Σ le symbole d'une somme algébrique,

$$R_x = \Sigma X,$$

$$R_y = \Sigma Y,$$

$$R_z = \Sigma Z,$$

$$M_x = \Sigma C_x = \Sigma(Zy - Yz),$$
$$M_y = \Sigma C_y = \Sigma(Xz - Zx),$$
$$M_z = \Sigma C_z = \Sigma(Yx - Xy).$$

Si l'on désigne par R et M la résultante et le couple résultant de chacun de ces deux groupes, on arrive, par la simple application du parallélipipède, aux relations suivantes, qui déterminent la force et le couple auxquels se réduisent finalement toutes les forces agissant sur le système rigide considéré :

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2,$$
$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2.$$

Si l'on désigne d'ailleurs par α_r, β_r, γ_r et par λ_m, μ_m, ν_n les angles que font, avec les trois axes rectangulaires des coordonnées, les directions de la résultante et de l'axe du couple résultant, on aura, pour déterminer ces directions, les relations suivantes :

$$\cos\alpha_r = \frac{R_x}{R}, \qquad \cos\beta_r = \frac{R_y}{R}, \qquad \cos\gamma_r = \frac{R_z}{R},$$
$$\cos\lambda_m = \frac{M_x}{M}, \qquad \cos\mu_m = \frac{M_y}{M}, \qquad \cos\nu_m = \frac{M_z}{M}.$$

11. *Condition pour qu'il y ait une résultante unique.* — Pour que la résultante R et le couple résultant M puissent se réduire à une seule force, il faut que l'axe du couple soit perpendiculaire à la direction de la force, ce qui entraîne la condition

$$\cos\alpha_r \cos\lambda_m + \cos\beta_r \cos\mu_m + \cos\gamma_r \cos\gamma_m = 0,$$

ou, eu égard aux valeurs des cosinus indiqués dans le numéro précédent,

$$\text{(a)} \qquad R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0,$$

ou bien encore

$$\Sigma X \Sigma(Zy - Yz) + \Sigma Y \Sigma(Xz - Zx) + \Sigma Z \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Le système de forces considéré ne pourra donc se réduire à une force unique que si ces forces satisfont à l'équation de condition (a) que nous venons de poser.

Art. 3. — Conditions d'équilibre d'un système de forces.

12. *Équilibre d'un système quelconque de forces.* — Pour arriver à l'expression des conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces, il suffit d'exprimer que la résultante R et le couple résultant M, auxquels on peut toujours ramener un pareil système, et que nous avons donné au numéro 10 les moyens de déterminer, sont nuls; on a donc

$$R = 0,$$
$$M = 0,$$

équations qui, d'après les valeurs de R^2 et M^2 données au numéro 10, entraînent les deux systèmes d'équations indiqués ci-après :

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$
$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0,$$

ou bien

$$(A)\begin{cases} \Sigma X = 0, \\ \Sigma Y = 0, \\ \Sigma Z = 0. \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} \Sigma(Zy - Yz) = 0, \\ \Sigma(Xz - Zx) = 0, \\ \Sigma(Yx - Xy) = 0. \end{cases}$$

Telles sont les conditions d'équilibre d'un système rigide et inextensible sollicité par des forces quelconques. Le système d'équations (A), dit *équations de translation*, exprime qu'il n'y a aucun mouvement de translation possible sur trois axes rectangulaires, ce qui entraîne nécessairement la condition qu'un pareil mouvement n'est possible sur aucune ligne passant par l'origine des coordonnées. Le système B, dit *équations de rotation*, exprime qu'il n'y a aucun mouvement de rotation possible autour de trois axes rectangulaires, ce qui entraîne l'impossibilité de la rotation autour d'une ligne quelconque passant par ce même point fixe de l'origine.

Le système des trois équations de rotation peut s'écrire aussi, comme on l'a fait plus haut, ainsi qu'il suit :

$$M_x = 0,$$
$$M_y = 0,$$
$$M_z = 0,$$

et M_x M_y M_z seraient les projections sur les trois axes des coordonnées de l'axe du moment de l'une quelconque des forces, en nommant, avec M. Résal, *axe du moment* d'une force F par rapport à un point fixé O, qui est l'origine des coordonnées dans les calculs précédents, la longueur représentative de ce moment portée sur une perpendiculaire en O au plan de la force et de ce point. On voit immédiatement ici que les axes des moments ne sont autre chose que ceux des couples dont il a été question dans ce qui précède.

Les trois équations de rotation (B) signifient donc qu'en représentant les moments comme il vient d'être dit, et en considérant ensuite comme des forces les axes de ces moments, la résultante de toutes ces forces est nulle, soit, si l'on veut employer le symbole le plus général,

$$\Sigma M_u = 0,$$

M_u désignant la projection de l'un quelconque des moments sur un axe quelconque u; il faut donc que la somme de toutes ces projections soit nulle.

En résumé, puisque, dans le cas d'un système matériel invariable, les conditions écrites plus haut sont nécessaires et suffisantes pour assurer son équilibre, et si l'on rejette d'ailleurs toute hypothèse de déplacement incompatible avec les liaisons du système, les forces X, Y, Z étant, dans ce cas, uniquement des forces extérieures, on peut énoncer les conditions d'équilibre d'un système indéformable de la manière suivante :

1° *Les forces extérieures transportées à l'origine se font équilibre, ou, en d'autres termes, en projection sur un axe quelconque les forces s'équilibrent;*

2° *Les axes des moments des forces se font équilibre,* tous ces axes étant pris, d'après la convention, comme passant par l'origine, ou, en d'autres termes, *en projection sur un axe quelconque les axes des moments s'équilibrent.*

Le premier de ces deux principes est celui de l'*équilibre statique de translation*, le second celui de l'*équilibre statique de rotation.*

13. *Principe des vitesses virtuelles.* — Nous sommes arrivés aux principes précédents par les simples considérations de la statique élémentaire; mais ils résultéraient, analytiquement, d'un principe général connu sous le nom de *principe des vitesses virtuelles,* et dont l'équation suivante est le symbole :

$$\text{(b)} \qquad \Sigma F \cos(F, \delta s)\delta s = 0.$$

Dans cette équation, δs indique un déplacement infiniment petit quelconque,

mais compatible avec les liaisons du système, et F, une force quelconque du système, à l'exclusion des forces de liaison.

Le principe des vitesses virtuelles remonte à Galilée, mais c'est Jean Bernoulli qui lui donna le premier sa précision, en l'énonçant de la manière suivante : « Lorsque des forces quelconques sont en équilibre sur un système de points matériels assujettis à certaines liaisons, si l'on conçoit ce système déplacé infiniment peu, en satisfaisant à ces conditions de liaison, la somme des produits de chaque force par le déplacement de son point d'application projeté sur la direction de cette force, ou *la somme des moments virtuels*, sera égale à zéro, en regardant comme positives les projections qui sont dans le sens des forces et comme négatives celles qui sont en sens contraire. »

Bernoulli se contenta de donner cet énoncé du principe sans le démontrer. Il fut démontré, pour la première fois, par Varignon, dans le siècle passé, mais seulement pour des cas particuliers. Lagrange admit, dans la première édition de sa *Mécanique analytique*, ce principe comme étant, pour ainsi dire, un axiome de mécanique qui pouvait conduire à la formule générale renfermant tous les problèmes d'équilibre. C'est Fourier qui donna la première démonstration générale du principe des vitesses virtuelles, et Lagrange en donna une aussi dans la deuxième édition de sa *Mécanique analytique*. Depuis, le principe s'est vulgarisé, et l'on en trouve des démonstrations dans tous les traités de mécanique dite *rationnelle*. Ce mot *rationnelle*, ainsi employé, me choque toujours, je le dis très franchement ici, attendu qu'il ne s'applique réellement pas à la chose, et je ne vois vraiment pas pourquoi, à la dénomination de mécanique analytique, si juste et si claire, on a substitué cette dénomination vague et prétentieuse de mécanique rationnelle.

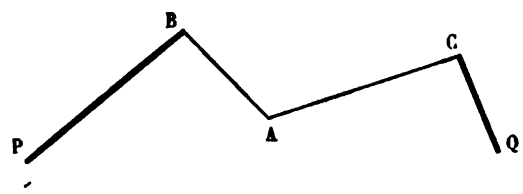
Le principe des vitesses virtuelles étant admis, on peut, par des opérations purement analytiques, en tirer les équations générales de l'équilibre d'un système quelconque de forces, auxquelles nous sommes arrivés plus haut par les simples considérations de la statique élémentaire et en partant du seul théorème du parallélogramme des forces. Ce serait allonger sans profit cette introduction que de donner ici cet exercice d'analyse, et je me borne à indiquer le fait. Il me suffit pour constater que le principe des vitesses virtuelles est le principe fondamental de la statique, et qu'il suffit à lui seul pour résoudre toutes les questions d'équilibre. Je me bornerai à démontrer que l'on peut tirer de ce principe le théorème du parallélogramme des forces qui a servi de base à tout ce qui a été établi plus haut.

Considérons (fig. 3) un levier dont P et Q seraient les forces, A le point

fixe. $AB = l$ et $AC = l'$ sont les longueurs des perpendiculaires abaissées du point A sur les directions des forces.

Le seul mouvement que puisse prendre ce système, sans modifier ses liaisons, est un mouvement de rotation autour du point A. Si l'on imprime à ce système un déplacement angulaire $\delta\omega$ très petit dans le sens de l'action de la force P, le déplacement dans le sens de cette force sera $l\delta\omega$, et le déplacement corrélatif pour la force Q sera $-l'\delta\omega$. Le principe des vitesses virtuelles représenté par l'équation (b) conduit immédiatement, dans le cas particulier qui nous occupe, à la relation

Fig. 3.



$$Pl\delta\omega - Ql'\delta\omega = 0,$$

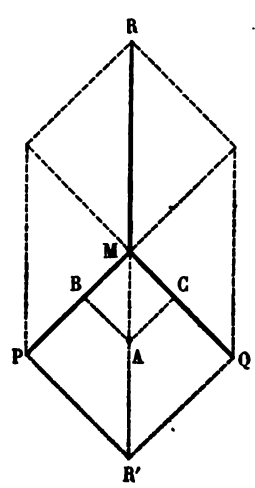
d'où

$$Pl = Ql'.$$

Cette équation exprime l'égalité des moments des forces pris par rapport au point fixe, condition connue de l'équilibre du levier.

Considérons maintenant trois forces P, Q, R situées dans le même plan (fig. 4) et appliquées en un point M, et supposons ces forces en équilibre. Sur la direction MR′ de la force R prolongée, prenons un point A et, de ce point, abaissons les perpendiculaires AB, AC sur les directions des deux autres forces. Le levier BAC peut être considéré comme invariablement lié au système des trois forces en équilibre sans que cet équilibre soit troublé. Or on peut, dans ce nouveau système, supprimer la force R sans que l'équilibre cesse d'exister, puisque cette force est détruite par la résistance du point fixe A. Les deux forces P et Q se font dès lors équilibre sur le levier BAC, d'où résulte, d'après ce qui vient d'être démontré tout à l'heure au moyen du principe des vitesses virtuelles, que les deux lignes AB, AC sont inversement proportionnelles aux forces P et Q, ce qui place nécessairement le point A sur la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces et démontre que leur résultante R′ est représentée en direction par cette diagonale.

Fig. 4.



Chacune des trois forces en équilibre est égale et contraire à la résultante des deux autres dirigée suivant la diagonale de leur parallélogramme; ces trois forces sont entre elles comme les côtés d'un triangle formé par trois lignes respectivement parallèles aux directions de ces forces, et chaque force est proportionnelle au sinus de l'angle compris entre la direction des deux autres, comme nous l'avons déjà établi au numéro 4.

On voit, par ce qui vient d'être dit, que *le principe des vitesses virtuelles, duquel se déduit celui du parallélogramme des forces, conduit effectivement à résoudre toutes les questions d'équilibre des forces et qu'on peut, dès lors, le considérer avec raison comme renfermant toute la statique.*

14. *Cas des forces parallèles.* — Il nous reste maintenant à examiner le cas où toutes les forces du système sont parallèles. La direction de toutes ces forces étant la même, les angles que fait cette direction avec les axes sont constants, et les équations (A) et (B) exprimant les conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces, données au numéro 12, peuvent s'écrire de la manière suivante, en se rappelant que l'on avait $X = F\cos\alpha$, $Y = F\cos\beta$, $Z = F\cos\gamma$, α, β, γ étant les angles de la direction de la force F avec les axes :

$$(A')\qquad \begin{cases} \cos\alpha\Sigma F = 0, \\ \cos\beta\Sigma F = 0, \\ \cos\gamma\Sigma F = 0; \end{cases}$$

$$(B')\qquad \begin{cases} \cos\gamma\Sigma Fy - \cos\beta\Sigma Fz = 0, \\ \cos\alpha\Sigma Fz - \cos\gamma\Sigma Fx = 0, \\ \cos\beta\Sigma Fx - \cos\alpha\Sigma Fy = 0. \end{cases}$$

Il faut admettre que la direction des forces parallèles dont on considère le système est quelconque; il suit de là que des trois angles α, β, γ, deux pourront avoir des valeurs quelconques, le troisième s'en déduisant par la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

On peut donc dire que les deux systèmes d'équations (A') et (B') devront être satisfaits, quelles que soient les valeurs de α et de β. Le système (A') ne peut être satisfait, dans ce cas, que si l'on a $\Sigma F = 0$; la dernière des trois équations (B') donnerait d'ailleurs $\frac{\Sigma Fx}{\Sigma Fy} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. ΣFx, ΣFy sont des quantités déter-

minées, puisque F désigne l'intensité de l'une quelconque des forces, x, y, z étant les coordonnées de son point d'application; or le rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ pouvant, puisque α et β sont quelconques, prendre une valeur quelconque, l'équation précédente ne peut être satisfaite que si l'on a à la fois

$$\Sigma Fx = 0,$$
$$\Sigma Fy = 0;$$

d'où l'on déduirait par les deux premières des équations (B')

$$\Sigma Fz = 0.$$

Les conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces parallèles sont donc les suivantes :

$$(A'') \qquad \Sigma F = 0;$$

$$(B'') \qquad \begin{cases} \Sigma Fx = 0, \\ \Sigma Fy = 0, \\ \Sigma Fz = 0. \end{cases}$$

On pourrait d'ailleurs, puisque la direction des axes est absolument arbitraire, à la seule condition qu'ils restent rectangulaires entre eux, supposer que l'un des axes, par exemple celui des z, fût parallèle à la direction des forces, et l'on aurait alors

$$\cos\alpha = 0,$$
$$\cos\beta = 0,$$
$$\cos\gamma = 1,$$

et les équations A et B deviendraient

$$\Sigma F = 0,$$
$$\Sigma Fy = 0,$$
$$\Sigma Fx = 0.$$

Il est facile, du reste, de voir immédiatement que, l'une quelconque des forces rencontrant le plan des x, y auquel elle est perpendiculaire, puisqu'on la suppose parallèle à l'axe des z, et les coordonnées de ce point de rencontre

étant u et y, on peut remplacer cette force par une force égale et de même sens transportée à l'origine et par un couple dont le moment serait

$$F\sqrt{x^2+y^2}.$$

Les composantes de ce moment, suivant les axes des x et des y, sont Fx et Fy; ΣF représente la résultante de toutes les forces, et ΣFy, ΣFx, les couples résultant de tous les couples composants suivant ces mêmes axes, et, pour qu'il y ait équilibre, il faut nécessairement que l'on ait, comme tout à l'heure,

$$\Sigma F = 0,$$
$$\Sigma Fx = 0,$$
$$\Sigma Fy = 0.$$

Les équations (A″) et (B″) expriment les conditions de l'équilibre d'un système de forces parallèles d'une direction quelconque par rapport aux axes. *Ces conditions sont donc que la somme algébrique des forces soit nulle et que les sommes de leurs moments par rapport à trois axes rectangulaires soient nulles.*

Le système d'équations

$$\Sigma F = 0,$$
$$\Sigma Fx = 0,$$
$$\Sigma Fy = 0,$$

auquel nous sommes parvenus en supposant la direction des forces parallèle à l'axe des z, démontre d'ailleurs que *la somme des moments des forces pris par rapport à deux axes perpendiculaires à leur direction doit être nulle, ce qui entraîne cette condition, plus générale encore, que la somme des moments des forces pris par rapport à une ligne quelconque perpendiculaire à leur direction est nulle.*

15. *Centre des forces parallèles.* — Si l'on désigne par R la résultante d'un système quelconque de forces parallèles et par x', y', z' les coordonnées de son point d'application, cette résultante devra être égale et opposée à la force qui assurerait l'équilibre du système; de sorte que les équations (A″) et (B″) deviendraient

$$\Sigma F - R = 0,$$
$$\Sigma Fx - Rx' = 0,$$
$$\Sigma Fy - Ry' = 0,$$
$$\Sigma Fz - Rz' = 0;$$

d'où l'on tirerait

$$(C)\qquad \begin{cases} R = \Sigma F, \\ x' = \dfrac{\Sigma F x}{R} = \dfrac{\Sigma F x}{\Sigma F}, \\ y' = \dfrac{\Sigma F y}{R} = \dfrac{\Sigma F y}{\Sigma F}, \\ z' = \dfrac{\Sigma F z}{R} = \dfrac{\Sigma F z}{\Sigma F}. \end{cases}$$

Ces équations déterminent la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles, ainsi que les coordonnées de son point d'application. Ce point reste le même, quelle que soit la direction des forces, puisque les équations (C) sont absolument indépendantes de cette direction, à condition toutefois que l'intensité des forces reste la même. C'est pour cette raison qu'on lui a donné le nom de *centre des forces parallèles*.

Si, toutes les forces étant de même intensité, leur nombre était représenté par n, les expressions précédentes deviendraient

$$R = nF,$$
$$x' = \frac{\Sigma x}{n},$$
$$y' = \frac{\Sigma y}{n},$$
$$z' = \frac{\Sigma z}{n},$$

et le centre des forces parallèles prend le nom de *centre des moyennes distances*. Sa position ne dépend plus que de celle des points d'application des forces, et sa détermination devient une opération de pure géométrie, absolument indépendante de l'intensité des forces.

Art. 4. — Cas où le système auquel sont appliquées les forces n'est pas libre. Efforts sur les appuis.

16. *Cas d'un point fixe.* — Lorsqu'un système indéformable n'est plus absolument libre, comme nous l'avons supposé dans tout ce qui précède, les appuis peuvent supporter, même lorsque les forces sont en équilibre, certains efforts qu'il faut indiquer les moyens de calculer. C'est ce qui arrive lorsque le système renferme des points fixes ou qu'il est assujetti à demeurer sur des surfaces ou des courbes fixes. Supposons d'abord qu'il y ait un seul

point fixe dans le système. On peut prendre ce point comme origine des coordonnées, et sa résistance détruit toutes les forces qui y sont transportées. Les conditions d'équilibre se réduisent, dans ce cas, aux seules équations B du numéro 12; mais l'effort exercé sur le point fixe par la résultante des forces ΣX, ΣY, ΣZ, qu'il détruit, est évidemment égal à cette résultante. Les couples représentés par le système d'équations (B) se détruisant évidemment d'eux-mêmes lorsqu'il y a équilibre, et que ces équations sont par conséquent satisfaites, il s'ensuit que ces couples n'exercent aucun effort sur le point fixe; ils ne peuvent tendre qu'à rompre le solide ou système indéformable auquel sont appliquées les forces.

Le levier présente l'exemple le plus simple d'un pareil système. Son équilibre exige donc que les couples qui résultent du transport des forces parallèlement à elles-mêmes au point fixe se détruisent entre eux, et, si les forces se réduisent à deux, comme cela arrive pour le levier proprement dit, il faut que ces forces soient dans le même plan avec le point fixe, et que les deux couples résultant du transport des deux forces en ce point aient des moments égaux et de signes contraires, de manière que leur somme algébrique s'annule. Or ces moments ne sont autres que ceux des forces pris par rapport au point fixe, ce qui fait retomber sur le principe du levier, déjà établi dans ce qui précède.

17. *Cas où il y a plus d'un point fixe.* — S'il y avait deux points fixes dans le système, celui-ci ne pourrait plus que tourner autour de la droite qui joindrait les deux points, et si nous prenons cette droite pour axe des z, il ne faut plus, pour assurer l'équilibre, que la seule équation suivante du système B

$$\Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Cette équation exprime que le couple résultant de tous les couples situés dans le plan des xy perpendiculaire à l'axe de rotation est nul, et cette condition suffit, puisque les couples résultants situés dans les plans des zy et des zx qui passent par l'axe fixe sont détruits par la résistance de cet axe, qui détruit aussi les résultantes partielles ΣX, ΣY, ΣZ des composantes des forces.

Pour déterminer les efforts exercés sur l'axe de rotation, il suffira de composer entre elles les forces qu'il détruit.

Les couples situés dans le plan des zx et les forces ΣX se réduisent à une force qui rencontre l'axe, et il en est de même des couples situés dans le plan des zy et des forces ΣY. La résultante des deux forces que l'on obtiendra ainsi exprimera l'effort exercé sur l'axe, qui tendra en outre à être entraîné dans sa

propre direction par la force ΣZ : celle-ci représentera donc l'effort que l'axe supporterait dans sa propre direction.

Lorsque le système contient plus de deux points fixes, il est en équilibre, quelles que soient les forces appliquées, et les efforts restent indéterminés; ces efforts, pris en sens contraire et réunis aux forces du système, devant d'ailleurs toujours satisfaire aux équations générales A et B de l'équilibre, cela permet d'établir, dans chaque cas particulier, les limites entre lesquelles les valeurs des efforts sont comprises. Le problème n'est d'ailleurs indéterminé que par suite de l'invariabilité absolue du système auquel sont appliquées les forces. Cette hypothèse est une pure abstraction, la nature ne présentant aucun corps absolument indéformable, et les conditions des variations réelles que subissent les corps sous l'action des forces qui les sollicitent viennent s'ajouter aux conditions théoriques, et donnent, en général, tout ce qu'il faut pour suppléer à l'indétermination qui vient d'être indiquée.

18. *Cas du glissement sur un axe.* — Si le corps pouvait glisser sur un axe, tout en ayant la liberté de tourner autour de cet axe, les conditions d'équilibre, en prenant toujours l'axe fixe pour axe des z, se réduiraient à une seule des équations de chacun des systèmes A et B, et l'on aurait

$$\Sigma Z = 0, \qquad \Sigma(Yx - Xy) = 0,$$

et si le glissement ne pouvait se faire que sans rotation autour de l'axe, les conditions se réduiraient à l'équation unique

$$\Sigma Z = 0,$$

et le couple résultant situé dans le plan des xy perpendiculaire à l'axe déterminerait la résistance que cet axe opposerait à *la torsion*.

19. *Cas d'une surface ou d'une courbe directrice.* — Si un point du système était assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe fixe, il faudrait, pour que l'équilibre fût possible, que la direction de la résultante des forces transportées au point de la surface ou de la courbe sur lequel s'appuie le système fût normale à la surface ou à la courbe supposées parfaitement polies, celles-ci ne pouvant détruire d'autres forces que celles qui leur sont normales.

Pour donner une idée des conditions auxquelles on est conduit dans ces deux cas, je réduirai le système à un point matériel sollicité par une force F

dont les composantes suivant les axes rectangulaires des coordonnées sont X, Y, Z.

Supposons d'abord que le point soit assujetti à rester sur une surface; la résistance de la surface peut être remplacée par une force N normale à cette surface, et si l'on désigne par a, b, c les angles que fait la normale à la surface avec les axes des x, y, z, on aura, en faisant entrer les composantes de cette force N dans les trois équations A de l'équilibre de translation :

$$X + N\cos a = 0,$$

$$Y + N\cos b = 0,$$

$$Z + N\cos c = 0,$$

d'où l'on déduit, par l'élimination de N,

$$\frac{X}{\cos a} = \frac{Y}{\cos b} = \frac{Z}{\cos c},$$

et l'on a ainsi deux équations nécessaires et suffisantes pour l'équilibre; on connaît d'ailleurs, au moyen de l'équation de la surface

$$F(x, y, z) = 0,$$

les valeurs des cos a, cos b, cos c, et, quant à la valeur de N, qui représente l'effort exercé sur la surface, elle n'est autre que celle de la résultante des forces supposée normale à la surface, et l'on a dès lors

$$N = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Si le point devait rester sur une courbe quelconque dont les équations seraient

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

la force N pourrait être dirigée suivant une normale arbitraire, et, si l'on désigne par a', b', c' les angles que fait la tangente à la courbe avec les axes a, b, c représentant les angles de cette normale avec les mêmes axes, on aura d'abord la condition

$$\cos a \cos a' + \cos b \cos b' + \cos c \cos c' = 0,$$

et les équations d'équilibre seront

$$X + N\cos a = 0,$$
$$Y + N\cos b = 0,$$
$$Z + N\cos c = 0.$$

En éliminant entre ces quatre équations a, b, c, N, qui sont inconnues, on arrive à la condition

$$X\cos a' + Y\cos b' + Z\cos c' = 0,$$

$\cos a'$ $\cos b'$ $\cos c'$ sont connus d'après les équations de la courbe et sont des fonctions de x, y, z. Si cette équation n'était pas satisfaite pour le point de la courbe que l'on considère, on déterminerait le point de cette courbe où les forces se détruiraient, en cherchant les valeurs de x, y, z communes à cette équation et à celles de la courbe.

Les composantes de la force N sont d'ailleurs égales et de signe contraire aux composantes X, Y, Z, ce qui les détermine, ainsi que la valeur de leur résultante.

Art. 5. — Des forces moléculaires.

20. *Actions moléculaires.* — Dans tout ce qui précède nous n'avons considéré que des forces extérieures agissant sur des systèmes matériels rigides et inextensibles. C'est cette condition de conserver une forme et un volume invariables qui définit les corps solides, et qui nous a permis d'arriver à l'établissement des conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces. Mais cette invariabilité absolue des corps solides, dans leur forme et leur volume, n'est elle-même qu'une abstraction, et il n'est pas un seul corps dans la nature qui soit absolument indéformable sous l'action des forces extérieures qui peuvent le solliciter. Tous les corps sont susceptibles de se prêter, sous l'influence de ces forces, à de très petites déformations, pour revenir à leur forme primitive dès que cesse l'action des forces. Cette propriété commune à tous les corps de la nature, qui la possèdent chacun à un degré plus ou moins élevé, constitue ce qu'on appelle *l'élasticité*. Sa limite se mesure par le maximum de l'effort que peut supporter le corps sans subir de *déformation permanente*.

Lamé, dans ses belles leçons sur l'élasticité des corps solides, a fait remarquer que l'élasticité était une propriété générale de la matière et qu'elle

jouait dans la nature un rôle au moins aussi important que la pesanteur. Pour lui l'élasticité et la gravitation sont les effets d'une même cause, qui rend dépendantes ou solidaires toutes les parties de l'univers, la gravitation manifestant cette dépendance à des distances considérables, l'élasticité à des distances très petites. Analysons le mode d'action de chacune de ces deux espèces de forces sur l'état moléculaire des corps.

21. *Actions moléculaires de pesanteur, centres de gravité.* — Si l'on considère un corps soumis uniquement à l'action de la pesanteur, celle-ci agit, comme j'ai déjà eu l'occasion de l'expliquer plus haut (n° 2), d'une manière uniforme sur toutes les molécules de ce corps, et le poids total du corps est l'intégrale de toutes ces actions élémentaires.

Si $dx\,dy\,dz$ est un élément du corps rapporté à trois axes rectangulaires de coordonnées x, y, z, π le poids de l'unité de volume pour le point x, y, z que l'on considère, P le poids total de ce corps, on aura

$$P = \iiint \pi\, dx\, dy\, dz,$$

expression dans laquelle π est une fonction de x, y, z. Les limites des intégrales sont d'ailleurs déterminées par la forme du corps, qui est elle-même représentée par des relations analytiques entre ces mêmes coordonnées.

Comme les corps que nous considérons à la surface de la terre sont très petits par rapport à son volume et situés à de très grandes distances de son centre, toutes les forces élémentaires de leur poids peuvent être considérées comme parallèles. Elles sont d'ailleurs toutes de même sens et ont par conséquent une résultante unique. Il y a ainsi un centre de ces forces parallèles, qui n'est autre chose que ce qu'on appelle le *centre de gravité du corps*. Les coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre de gravité d'un corps s'obtiennent donc immédiatement en appliquant ici les équations (C) du numéro 15 ; en y faisant $R = P$ et prenant pour P l'expression qui vient d'être donnée, on aura donc :

$$(C'')\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{\iiint \pi\, dx\, dy\, dz . x}{\iiint \pi\, dx\, dy\, dz}, \\ y_1 &= \frac{\iiint \pi\, dx\, dy\, dz . y}{\iiint \pi\, dx\, dy\, dz}, \\ z_1 &= \frac{\iiint \pi\, dx\, dy\, dz . z}{\iiint \pi\, dx\, dy\, dz}. \end{aligned}\right.$$

Si le poids π de l'unité de volume est constant, ces expressions deviennent :

$$(C''')\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\iiint dx\,dy\,dz\,.\,x}{\iiint dx\,dy\,dz}, \\ y_1 = \dfrac{\iiint dx\,dy\,dz\,.\,y}{\iiint dx\,dy\,dz}, \\ z_1 = \dfrac{\iiint dx\,dy\,dz\,.\,z}{\iiint dx\,dy\,dz}. \end{cases}$$

Ces relations permettent de trouver le centre de gravité de tout volume géométriquement défini.

Si l'on considère une plaque mince dont l'épaisseur soit très faible, ce qu'on appelle *une surface matérielle*, les expressions précédentes se modifient, et, si la surface est donnée par une équation de la forme

$$z = f(x, y),$$

le poids de l'élément de surface a pour expression, en employant l'expression que donne le calcul différentiel pour l'élément de surface, π désignant ici le poids correspondant à l'unité de surface de la plaque,

$$\pi\,dx\,dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1},$$

et les coordonnées du centre de gravité deviennent :

$$(C_1)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\iint \pi x\,.\,dx\,dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}{\iint \pi\,dx\,dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}, \\ y_1 = \dfrac{\iint \pi y\,.\,dx\,dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}{\iint \pi\,dx\,dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}, \\ z_1 = \dfrac{\iint \pi z\,.\,dx\,dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}{\iint \pi\,dx\,dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}. \end{cases}$$

Si la surface était plane, on pourrait la prendre pour plan des xy, et son équation devient alors

$$z = 0,$$

ce qui réduit les équations C_1 à

$$(C'_1)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\iint \pi x\, dy\, dx}{\iint \pi\, dy\, dx}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{\iint \pi y . dy\, dx}{\iint \pi\, dy\, dx}. \end{cases}$$

Si la surface plane était verticale, on pourrait la prendre pour plan des zx par exemple, le poids de son élément deviendrait $\pi\, dx\, dz$ et l'on aurait, pour les coordonnées du centre de gravité,

$$(C''_1)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\iint \pi\, dx\, dz . x}{\iint \pi\, dx\, dz}, \\[2ex] z_1 = \dfrac{\iint \pi\, dx\, dz . z}{\iint \pi\, dx\, dz}. \end{cases}$$

Les expressions qui viennent d'être données se simplifient d'ailleurs lorsque π est constant, puisque cette quantité disparaît alors complètement. Ainsi, pour ne prendre que les expressions C''_1, les plus simples, celles-ci deviennent

$$(C'''_1)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\iint x\, dx\, dz}{\iint dx\, dz}, \\[2ex] z_1 = \dfrac{\iint z\, dx\, dz}{\iint dx\, dz}. \end{cases}$$

On trouverait, d'une manière analogue, le centre de gravité d'une *ligne matérielle* ou tige pesante, et si l'on se rappelle que la longueur de l'élément ds d'une courbe quelconque dans l'espace a pour expression $dx\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$, on aurait

$$(C_2)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\int \pi x . dx \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}}{\int \pi\, dx \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}}, \\[4ex] y_1 = \dfrac{\int \pi y . dx \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}}{\int \pi\, dx \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}}, \\[4ex] z_1 = \dfrac{\int \pi z . dx \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}}{\int \pi\, dx \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}}. \end{cases}$$

Si la courbe était plane, on pourrait la mettre dans le plan des xy, et alors $\frac{dz}{dx}$ disparaîtrait des équations C_2; enfin, si elle se réduisait à une ligne droite, on pourrait la prendre pour axe des x, et alors $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$ disparaissent à la fois, ainsi que y et z, et les expressions C_2 prennent la forme très simple et unique

$$(C'_2) \qquad x_1 = \frac{\int \pi x\, dx}{\int \pi\, dx},$$

et, si le poids de l'unité de volume est constant,

$$x_1 = \frac{\int x\, dx}{\int dx},$$

expression qui indique, comme on devait s'y attendre, que le centre de gravité d'une tige homogène de longueur donnée est au milieu de cette longueur.

Ce qui vient d'être dit résout tout ce qui concerne les actions moléculaires dues à la gravitation, puisqu'on peut déterminer leur résultante et son point d'application pour chaque corps, volume, surface ou ligne matérielle.

Si l'on regarde maintenant ces corps eux-mêmes, dont on est parvenu à déterminer les centres de gravité par l'analyse de leurs actions moléculaires de pesanteur, comme les éléments d'un système de corps solides, ce qui vient d'être dit permettra de déterminer le centre de gravité de chacun de ces corps; de sorte que le système pourra être remplacé par un système de points à chacun desquels sera appliquée une force égale au poids du corps dont il est le centre de gravité et dirigée suivant la verticale du lieu. La recherche du centre de gravité de ce système est ramenée ainsi à la recherche du centre des forces parallèles indiquée au numéro 15; de sorte que, si l'on désigne par p le poids de l'un quelconque des corps du système et par P son poids total, on aura

$$(D') \qquad \begin{cases} Px_1 = \Sigma\, px, \\ Py_1 = \Sigma\, py, \\ Pz_1 = \Sigma\, pz; \end{cases}$$

d'où résulte encore que, si l'on prend le centre de gravité du système pour origine des coordonnées, il sera caractérisé par les trois relations

$$(E') \qquad \begin{cases} \Sigma\, px = 0, \\ \Sigma\, py = 0, \\ \Sigma\, pz = 0, \end{cases}$$

ou, s'il s'agit d'un corps de volume continu,

$$(F') \qquad \begin{cases} \iiint \pi\, dx\, dy\, dz \cdot x = 0, \\ \iiint \pi\, dx\, dy\, dz \cdot y = 0, \\ \iiint \pi\, dx\, dy\, dz \cdot z = 0. \end{cases}$$

Ces relations fondamentales établies en ce qui concerne les actions moléculaires dues à la gravitation, passons à celles qui regardent les actions moléculaires dues à l'élasticité.

22. *Actions moléculaires d'élasticité.* — Si l'on considère deux points matériels ou molécules d'un même corps, ces deux points exerceront l'un sur l'autre deux attractions réciproques dont l'intensité sera la même. Cette attraction mutuelle est due à la même cause que la gravitation universelle, mais elle est combattue par une action répulsive inhérente à l'état moléculaire des corps, dont toutes les molécules ne sont pas en contact immédiat et dont le rapprochement, sous l'action d'une force extérieure, éprouve d'autant plus de résistance que la distance élémentaire entre les molécules est plus petite. Ainsi nous constatons, par l'expérience, que les corps se contractent ou se dilatent à mesure que la température diminue ou augmente; leurs molécules sont d'autant plus éloignées les unes des autres que, toutes choses égales d'ailleurs, la température est plus élevée. La fonction qui représenterait cette force répulsive dont nous venons de parler aurait donc très certainement la température au nombre de ses variables.

Considérons maintenant deux molécules égales : il est évident qu'elles vont se placer respectivement à une distance telle que la force attractive fasse équilibre à la force répulsive. Celle-ci ne varie pas dans le même rapport, et sa loi est encore à trouver. Tout ce que l'on peut dire, c'est qu'elle est égale à la force attractive lorsque le corps n'est soumis à aucune action extérieure, c'est-à-dire dans le cas de l'*équilibre intérieur* de ce corps. Si l'on conçoit maintenant qu'à chacun des deux points matériels agissant et réagissant ainsi l'un sur l'autre, on applique deux forces égales qui tendent à les écarter l'un de l'autre, ces forces s'ajoutent à la force moléculaire répulsive; la résultante devient plus grande que la force attractive, et les deux molécules s'écartent l'une de l'autre; si l'action des forces extérieures tendait, au contraire, à rapprocher les deux molécules, elle s'ajouterait à l'attraction, et ces deux molécules se rapprocheraient l'une de l'autre. Les forces extérieures enlevées,

l'équilibre primitif doit évidemment se rétablir, à moins que, dans leur action, elles n'aient dépassé la *limite d'élasticité* du corps.

Les mouvements d'oscillation (d'étendue restreinte par cette limite) sont les effets de la constitution moléculaire des corps. Dans les corps solides, les petits changements de forme font varier dans d'assez fortes proportions, mais non de la même manière, les actions attractives et répulsives, et les corps résistent entre certaines limites, sans se déformer sensiblement, à des efforts de compression ou d'extension assez notables. Cela tient à ce que, dans cette catégorie de corps, il y a un équilibre stable entre les forces attractives et répulsives ou entre les *forces intérieures*. Dans les fluides, au contraire, cet équilibre est presque instable, et le moindre effort sensible suffit pour leur faire atteindre la limite de leur élasticité et rompre la loi de continuité de leur état moléculaire.

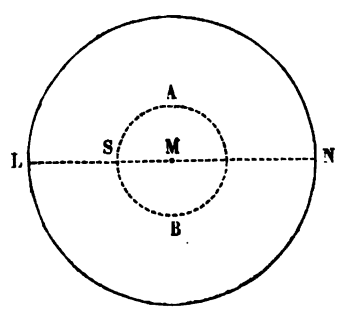
Il est clair que, dans l'application de la mécanique aux phénomènes naturels, il faut nécessairement tenir compte des actions moléculaires que je viens d'indiquer, si l'on veut arriver à des résultats approchant de la vérité. Le tout est donc de trouver maintenant des expressions de ces forces que l'on puisse introduire dans les relations analytiques. Il est évident d'abord qu'une étude directe ne conduirait à rien sans faire des hypothèses, la loi de l'action de ces forces attractives et répulsives qui constituent l'élasticité d'un corps étant encore inconnue jusqu'à présent, et il faut trouver, si l'on ne veut pas risquer de s'égarer, une expression de la force indépendante de toute hypothèse. Or un fait important, que l'observation confirme, est celui-ci : si, après avoir fait agir une force extérieure qui a légèrement déformé le corps, on fait cesser son action, celui-ci reprend sa forme primitive; d'où résulte nécessairement que les forces attractives et répulsives qui agissent pendant la déformation *naissent, croissent, décroissent et s'annulent en même temps*, comme l'a si bien dit Lamé, et je ne saurais mieux faire que de citer ici textuellement ce qu'il a exposé sur les principes de sa théorie de l'élasticité :

« Un corps solide à la surface duquel ne s'exerce aucune pression et dont les molécules ne sont sollicitées par aucune force extérieure est le lieu d'une infinité de points matériels infiniment rapprochés, mais qui ne se touchent pas, équidistants si le corps est homogène, et qui jouissent, les uns à l'égard des autres, de la propriété suivante : si, en vertu d'un effort ou d'une action extérieure qui vient à naître tout à coup, deux points matériels, pris au hasard mais suffisamment voisins, se rapprochent ou s'éloignent l'un de l'autre, il en résulte, entre ces deux molécules, une action ou force, répulsive dans le pre-

mier cas, attractive dans le second, qui est une fonction de la distance primitive ζ des deux molécules et de l'écartement $\Delta\zeta$, c'est-à-dire de la quantité dont elles se sont rapprochées ou éloignées; cette fonction, pour un même corps, est nulle, quelle que soit la distance ζ, lorsque l'écartement $\Delta\zeta$ est nul[1]; elle décroîtra rapidement, quel que soit l'écartement $\Delta\zeta$, dès que la distance ζ acquiert une valeur sensible, puisque toute adhésion cesse entre deux parties d'un même corps séparées par une distance appréciable; selon que cette fonction variera plus ou moins rapidement avec l'écartement, les mêmes forces extérieures produiront un changement de forme, moins sensible dans le premier cas, plus sensible dans le second. »

Si l'on se borne donc au cas où les déformations produites par les forces extérieures sont très petites, c'est-à-dire où la limite d'élasticité des corps n'est pas dépassée, et c'est là l'hypothèse sur laquelle repose toute la théorie de Lamé, la fonction dont il vient d'être question se réduit au produit de la première puissance de l'écartement $\Delta\zeta$ par une fonction $F(\zeta)$ de la distance ζ, qui est insensible dès que ζ devient appréciable. Arrivons maintenant à la définition de la force élastique; la voici textuellement telle que l'a donnée Lamé :

Fig. 5.



« Soit M (fig. 5) une molécule intérieure du solide. Imaginons : 1° la sphère S dont le centre est en M, et qui a pour rayon la plus grande distance ζ, au delà de laquelle $F(\zeta)$ est insensible, distance limite que l'on appelle *rayon d'activité de l'action moléculaire;* 2° par le point M un plan quelconque LN, lequel partage la sphère S en deux hémisphères SA, SB; 3° au point M un élément superficiel extrêmement petit ϖ sur le plan LN; 4° enfin, dans l'hémisphère SB un cylindre droit très délié ayant ϖ pour base.

« Par suite de la déformation générale, les molécules contenues dans l'hémisphère SA exercent des actions sur celles du cylindre; la résultante ϖE de toutes ces actions est ce que nous appellerons *la force élastique* exercée

[1] On voit que Lamé raisonne comme si, dans un corps à l'état naturel ou non encore déformé, chaque couple de molécules était séparément en équilibre, et il regarde les actions moléculaires comme ne se développant qu'à partir de cet état. Poisson, Cauchy, M. de Saint-Venant, se sont rapprochés davantage de la réalité, en tenant compte des actions moléculaires, qui, en général, doivent s'exercer déjà entre deux molécules d'un corps, même libre de toute pression; mais les résultats pratiques conservent la même forme dans cette théorie plus générale, et c'est pour cela que je me suis borné ici à un aperçu des idées de Lamé, qui avaient, du reste, été déjà celles de Navier.

par SA sur SB et rapportée à l'élément plan ϖ. Cette résultante sera en général oblique à l'élément ϖ; si elle est normale à cet élément et dirigée vers l'hémisphère SA, elle représente une traction; si, encore normale à l'élément ϖ, elle est dirigée vers SB, elle représente une pression, c'est-à-dire que SA attire le cylindre dans le premier cas et le repousse dans le second. Si la force élastique ϖE ou la résultante qui vient d'être définie est parallèle à l'élément ϖ, elle tend à faire glisser le cylindre parallèlement au plan LN. On lui donne le nom de *force élastique tangentielle*.

« Pareillement, si le cylindre est situé dans l'hémisphère SA, la résultante des actions exercées sur les molécules de ce cylindre par les molécules de l'hémisphère SB est la force élastique ϖE′ exercée par SB sur SA rapportée à l'élément plan ϖ.

« Si le corps légèrement déformé est *en équilibre d'élasticité*, les deux forces ϖE et ϖE′ doivent être égales en intensité, et de direction contraire ou opposée; mais elles représentent toutes deux ou des tractions ou des pressions ou des forces tangentielles, c'est-à-dire que, si l'une est une traction, l'autre sera pareillement une traction directement opposée à la première.

« La force élastique ϖE considérée par rapport aux éléments plans ϖ menés tous parallèles entre eux par tous les points du corps variera, en intensité et en direction, d'un de ces points à un autre; de plus en un même point M elle variera avec l'orientation de l'élément plan ϖ ou de la normale à cet élément. »

On voit, d'après ce lucide exposé, que les forces moléculaires rentrent dans la catégorie des forces réparties dont il a été question au numéro 1. Ces forces sont toutes rapportées à des surfaces planes, et leur unité d'intensité est l'unité de force agissant sur l'unité de surface. Une pression P agissant sur une surface S a pour intensité p, et l'on a

$$p = \frac{P}{S}$$

et, réciproquement, on aurait

$$P = Sp.$$

L'unité de l'intensité p est le kilogramme par mètre carré, et cette expression est de même forme exactement que celle de la force élastique ϖE indiquée plus haut.

Si l'intensité p de la force n'était pas constante en grandeur, mais restait constante en direction, on arriverait à l'expression de P en faisant remarquer

que, le plan sur lequel elle agit étant pris pour plan des xy, la surface S, sur laquelle cette force est répartie, aurait pour expression,

$$S = \iint dx\,dy,$$

et la force P

$$P = \iint p\,dx\,dy,$$

p étant variable avec les coordonnées x, y, et l'expression de la force moyenne P_m serait

$$P_m = \frac{P}{S} = \frac{\iint p\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}.$$

Nous sommes en mesure maintenant d'exprimer les *forces moléculaires ou intérieures* en kilogrammes, comme nous l'avons fait, dans ce qui précède, pour les forces extérieures, et de leur appliquer, par conséquent, tout ce qui a été démontré pour l'équilibre de ces dernières. Il suffira, lorsque l'on connaîtra l'intensité d'une force moléculaire, de la multiplier par la surface sur laquelle elle agit pour avoir une force absolue exprimée en kilogrammes, comme les forces extérieures, auxquelles elle sera, par conséquent, parfaitement comparable, et avec lesquelles on pourra l'introduire dans les équations d'équilibre.

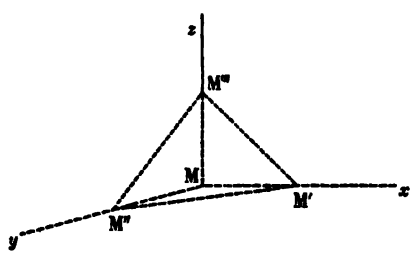
Il faut faire remarquer, d'ailleurs, que, dans l'étude des actions moléculaires, les forces que l'on a à considérer donnent lieu à des pressions ou à des tensions; elles tendent à réduire ou à augmenter les dimensions du corps dans le sens de leur action, et l'intensité de ces deux actions peut s'indiquer par le même symbole p, en convenant, au moins en hydraulique, de lui donner le signe + s'il y a pression et le signe — s'il y a tension.

23. *Expressions de l'intensité des pressions.* — Si l'on veut maintenant entrer dans le détail de l'étude des actions moléculaires, il faut considérer un volume élémentaire ayant une forme géométrique déterminée et qui puisse servir de type aux éléments dans lesquels un corps peut être subdivisé, et chercher les relations analytiques exprimant l'équilibre de ce volume élémentaire sous l'action des forces moléculaires qui le sollicitent. C'est la méthode inaugurée par Cauchy, suivie par Lamé et par tous les géomètres qui se sont occupés de cette intéressante question. M. Boussinesq a donné, dans son Essai sur les eaux courantes, pages 32 à 37, une démonstration complète des conditions d'équilibre du tétraèdre élémentaire. C'est la plus simple qui en ait été donnée jusqu'ici, à mon sens du moins, et je vais en faire l'analyse sommaire, en enga-

geant les lecteurs auxquels, contrairement à mon espoir, elle ne paraîtrait pas suffisante pour bien leur faire comprendre la question, à recourir à l'écrit de M. Boussinesq ou bien aux tomes XXIII et XXIV du recueil des Savants étrangers, dans lesquels il a été inséré.

Supposons (fig. 6) les arêtes du tétraèdre infiniment petit M M′ M″ M‴ parallèles aux axes des x, y, z, et soient l, m, n les cosinus des angles que la normale à l'élément plan M′ M″ M‴ fait avec ces axes. Désignons par X_1, Y_1, Z_1, les valeurs particulières que prennent les composantes p_x, p_y, p_z de la pression à travers l'élément plan lorsque sa direction est normale à l'axe des x, c'est-à-dire lorsqu'on a $l=1$, $m=0$, $n=0$; par X_2, Y_2, Z_2 les valeurs particulières p_x, p_y, p_z lorsque l'élément plan est normal à l'axe des y, c'est-à-dire lorsqu'on a $l=0$, $m=0$, $n=0$; et par X_3, Y_3, Z_3 les valeurs que prennent p_x, p_y, p_z lorsque l'élément plan est normal à l'axe des z, c'est-à-dire lorsqu'on a $l=0$, $m=0$, $n=1$.

Fig. 6.



Si l'on désigne, avec M. Boussinesq, par a l'aire de la face M′ M″ M‴, les aires des surfaces M″ M M‴, M‴ M M′, M′ M M″, projections de l'aire a sur les trois plans normaux aux axes, vaudront respectivement al, am, an, et les expressions des composantes suivant les axes des x, y, z des pressions exercées en dehors du tétraèdre seront :

$$-X_1 la,\ -Y_1 la,\ -Z_1 la,\ \text{pour la face M″ M M‴},$$
$$-X_2 ma,\ -Y_2 ma,\ -Z_2 ma,\ \text{pour la face M‴ M M′},$$
$$-X_3 na,\ -Y_3 na,\ -Z_3 na,\ \text{pour la face M′ M M″},$$
$$p_x a,\ p_y a,\ p_z a,\ \text{pour la face M′ M″ M‴}.$$

En appliquant à ce système de forces l'équation (A) de l'équilibre de translation du numéro 12, qui leur est applicable dans leurs expressions actuelles (intensité multipliée par la surface), il viendra

$$-X_1 la - X_2 ma - X_3 na + p_x a = 0,$$
$$-Y_1 la - Y_2 ma - Y_3 na + p_y a = 0,$$
$$-Z_1 la - Z_2 ma - Z_3 na + p_z a = 0,$$

d'où, en divisant par a et dégageant p_x, p_y, p_z :

$$(d)\qquad \begin{cases} p_x = lX_1 + mX_2 + nX_3, \\ p_y = lY_1 + mY_2 + nY_3, \\ p_z = lZ_1 + mZ_2 + nZ_3. \end{cases}$$

Si l'on désigne par w le volume très petit du tétraèdre, et si l'on applique au système de forces qui vient d'être indiqué en détail tout à l'heure les équations (B) de l'équilibre de rotation du numéro 12, par rapport à des axes parallèles à Mx, My, Mz, mais menés à partir du centre de gravité du triangle M′ M″ M‴, en négligeant, dans un même groupe d'infiniment petits, ceux d'ordre supérieur de petitesse, on arrive aux relations

$$\begin{aligned} -wZ_2 + wY_2 &= 0, \\ -wX_3 + wZ_1 &= 0, \\ -wY_1 + wX_2 &= 0; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les trois équations

$$(e)\qquad \begin{cases} Z_2 = Y_3, \\ X_3 = Z_1, \\ Y_1 = X_2. \end{cases}$$

Les neuf composantes X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3 des équations (d) se réduisent donc à six, en vertu des équations (e).

Les équations (d) peuvent s'écrire d'une manière différente, en y introduisant les notations adoptées par Lamé, qui désigne par N_1, N_2, N_3 les composantes X_1, Y_2, Z_3, normales aux éléments plans qu'elles sollicitent, et par T_1, T_2, T_3 les autres composantes Z_2 ou Y_3, X_3 ou Z_1, Y_1 ou X_2, qui sont tangentielles aux éléments. Au moyen de ces nouvelles notations, divisant les composantes en composantes normales N et composantes tangentielles T, les équations (d) deviennent :

$$(d)\qquad \begin{cases} p_x = lN_1 + mT_3 + nT_2, \\ p_y = lT_3 + mN_2 + nT_1, \\ p_z = lT_2 + mT_1 + nN_3. \end{cases}$$

Ce système d'équations est la base de la mécanique moléculaire. On en déduit immédiatement la loi de réciprocité énoncée ci-après :

Si l'on considère deux éléments plans menés par un même point et que l'on projette la pression par unité de surface de l'un de ces élements sur la normale à l'autre, les deux projections ainsi obtenues sont égales.

Prenons, par exemple, la première des trois équations (d) : p_x est la projection sur l'axe des x positifs de la pression à travers l'élément normal à la direction (l, m, n), et $lN_1 + mT_3 + NT_2$ égal à $lX_1 + mY_1 + nZ_1$ est la projection sur cette même direction (l, m, n) de la pression X_1, Y_1, Z_1 à travers l'élément plan normal aux x positifs.

Le système des équations (e) n'est, comme on le voit aisément, qu'un cas particulier de la loi générale qui vient d'être énoncée.

Les équations (d) donnent les intensités de toutes les pressions à travers les divers éléments plans qui passent par un même point, en fonction de six composantes distinctes de celles qui s'exercent sur les trois éléments plans appelés *principaux* et qui sont normaux aux axes des coordonnées. Ces équations sont au nombre de celles qui régissent la marche des pressions à l'intérieur des milieux, de quelque nature qu'ils soient, solides, liquides ou gazeux.

24. *Équations indéfinies de l'équilibre des milieux.* — Si l'on veut arriver maintenant aux équations indéfinies de l'équilibre, il suffit d'exprimer les conditions d'équilibre du parallélipipède élémentaire ayant pour côtés (fig. 7) les arêtes du tétraèdre que nous avons considéré plus haut, savoir :

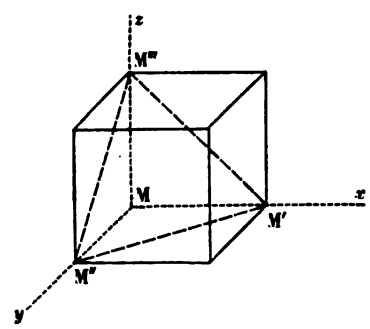
$$MM' = dx, \qquad MM'' = dy, \qquad MM''' = dz.$$

L'élément $dx\,dy\,dz$ doit être en équilibre sous l'action des forces élastiques ou des pressions exercées sur ces six faces et des forces qui sollicitent la masse[1] $\rho\,dx\,dy\,dz$, ρ étant la masse de l'unité de volume. Si l'on désigne par X, Y, Z les composantes de la force extérieure rapportées à l'unité de masse, les expressions de ces composantes en unités de poids seraient $\rho\,dx\,dy\,dz\,X$, $\rho\,dx\,dy\,dz\,Y$ et $\rho\,dx\,dy\,dz\,Z$. Il nous reste à déterminer les composantes de la pression. Soient x, y, z les coordonnées du point M, et considérons la face M″ M M‴ perpendiculaire aux x et sa face parallèle supposée passant par le point M′.

[1] La masse est définie au chapitre suivant, numéro 27. J'aurais pu le faire ici, mais cette définition ne peut s'établir indépendamment des considérations de vitesse et d'accélération, qui sont plutôt du domaine de la dynamique, et j'ai cru dès lors qu'il valait mieux laisser cette définition dans la partie de mon travail qui concerne la dynamique, sans la reproduire ici.

Si X_1, Y_1, Z_1 sont les composantes de la pression au point M dont les coordonnées sont x, y, z, la composante de la pression par unité de surface au point M′ normale à la face $M''MM''' = dy\,dz$ est, pour la face passant par le point M′, $X_1 + \frac{dX_1}{dx}dx$, et pour la surface $dx\,dy$ la composante devient

Fig. 7.



$$dy\,dz\left(X_1 + \frac{dX_1}{dx}dx\right).$$

La face M‴MM′ donne suivant les x une composante égale à $-dy\,dz\,X_1$, et la somme de ces deux composantes conduit à

$$dx\,dy\,dz\frac{dX_1}{dx}.$$

Les deux autres groupes de faces parallèles du parallélipipède donneront de même

$$dx\,dy\,dz\frac{dX_2}{dy}$$

et

$$dx\,dy\,dz\frac{dX_3}{dz}.$$

La somme des composantes suivant l'axe des x est donc

$$dx\,dy\,dz\left(\frac{dX_1}{dx} + \frac{dX_2}{dy} + \frac{dX_3}{dz}\right).$$

On trouverait de même pour la somme des composantes suivant les axes des y et des z :

$$dx\,dy\,dz\left(\frac{dY_1}{dx} + \frac{dY_2}{dy} + \frac{dY_3}{dz}\right),$$

$$dx\,dy\,dz\left(\frac{dZ_1}{dx} + \frac{dZ_2}{dy} + \frac{dZ_3}{dz}\right).$$

Ces composantes étant d'ailleurs rapportées sous cette forme à la même unité que les forces extérieures, on peut appliquer au système entier l'équation (A) de l'équilibre de translation, et il viendra, en divisant par $dx\,dy\,dz$,

$$(\Gamma)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dX_1}{dx} + \frac{dX_2}{dy} + \frac{dX_3}{dz} + \rho X = 0,\\ &\frac{dY_1}{dx} + \frac{dY_2}{dy} + \frac{dY_3}{dz} + \rho Y = 0,\\ &\frac{dZ_1}{dx} + \frac{dZ_2}{dy} + \frac{dZ_3}{dz} + \rho Z = 0,\end{aligned}\right.$$

relations qui, en vertu de la relation (e) établie plus haut pour le tétraèdre, et qui subsiste encore pour le parallélipipède, et de la définition de N et de T donnée plus haut, peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$(g)\qquad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dx}+\dfrac{dT_3}{dy}+\dfrac{dT_2}{dz}+\rho X=0, \\ \dfrac{dT_3}{dx}+\dfrac{dN_2}{dy}+\dfrac{dT_1}{dz}+\rho Y=0, \\ \dfrac{dT_2}{dx}+\dfrac{dT_1}{dy}+\dfrac{dN_3}{dz}+\rho Z=0. \end{cases}$$

Telles sont les équations indéfinies d'équilibre lorsqu'on tient compte de l'élasticité ou des actions moléculaires intérieures des corps; il faut y joindre les équations (d'), qui donnent les valeurs p_x, p_y, p_z des composantes de la pression et qui montrent qu'elles dépendent uniquement des fonctions N et T de x, y, z; ces fonctions doivent satisfaire aux équations (g), qui sont des équations aux différences partielles linéaires et du premier ordre. Ces deux systèmes d'équations permettent de résoudre, pour chaque corps élastique en particulier, la question de l'équilibre des actions moléculaires qui se produisent dans l'intérieur du corps sous l'influence de forces extérieures données.

Si le corps n'était sollicité que par la pesanteur, on aurait

$$\rho X=0,$$
$$\rho Y=0,$$
$$\rho Z=-\pi,$$

π étant le poids de l'unité de volume, et les trois équations précédentes se réduiraient à

$$(g')\qquad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dx}+\dfrac{dT_3}{dy}+\dfrac{dT_2}{dz}=0, \\ \dfrac{dT_3}{dx}+\dfrac{dN_2}{dy}+\dfrac{dT_1}{dz}=0, \\ \dfrac{dT_2}{dx}+\dfrac{dT_1}{dy}+\dfrac{dN_3}{dz}=\pi. \end{cases}$$

Ces trois équations sont celles de *l'équilibre intérieur* d'un corps *pesant* données, avec d'autres notations, par Sir Macquorn-Rankine, dans son *Traité de mécanique appliquée*, numéro 116, page 115 de ce traité. Ces notations, que Lamé avait, du reste, déjà indiquées d'une manière un peu différente, consistent à affecter le symbole p de l'action moléculaire d'une double sous-lettre, la première indiquant l'axe auquel la normale à l'élément plan est parallèle,

la seconde l'axe auquel est parallèle la composante d'action moléculaire. Ainsi p_{xy} indique la composante suivant l'axe des y de l'action moléculaire sur un élément plan dont la normale est parallèle à l'axe des x; p_{xx} indique la composante suivant l'axe des x sur l'élément plan dont la normale est parallèle à cet axe. On a, d'après ces notations et ce qui a été démontré plus haut :

$$\begin{aligned} N_1 &= X_1 = p_{xx}, & T_1 &= Z_2 = Y_3 = p_{yz} = p_{zy}, \\ N_2 &= Y_2 = p_{yy}, & T_2 &= X_3 = Z_1 = p_{zx} = p_{xz}, \\ N_3 &= Z_3 = p_{zz}, & T_3 &= Y_1 = Y_2 = p_{xy} = p_{yx}. \end{aligned}$$

En ayant égard à ces nouvelles notations, les équations (g') reproduisent exactement celles de Sir Macquorn-Rankine. On les généraliserait encore en substituant ces mêmes notations dans les équations (f) ou (g), qui deviendraient :

$$\begin{aligned} \frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} + \rho X &= 0, \\ \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz} + \rho Y &= 0, \\ \frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} + \rho Z &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on se met maintenant dans le cas, absolument abstrait, d'un système élastique par opposition aux systèmes rigides et inextensibles considérés dans la statique élémentaire, et que l'on veuille avoir uniquement les conditions de l'équilibre intérieur d'un pareil système, il faut supposer la force extérieure nulle, et alors les équations (g) deviennent :

$$(g'') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} &= 0, \\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} &= 0, \\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Si le système était tel qu'il ne pût s'y produire de composantes tangentielles, les équations (d') du numéro 23 deviendraient :

$$\begin{aligned} p_x &= lN_1, \\ p_y &= mN_2, \\ p_z &= nN_3, \end{aligned}$$

ces formules devant exprimer les composantes d'une même action normale, égale par conséquent à leurs quotients $\frac{p_x}{l}$, $\frac{p_y}{m}$, $\frac{p_z}{n}$, par les cosinus de projection l, m, n; si l'on désigne par $-p$ cette force normale, on aurait :

$$\frac{p_x}{l} \text{ ou } N_1 = -p, \qquad \frac{p_y}{m} \text{ ou } N_2 = -p, \qquad \frac{p_z}{n} \text{ ou } N_3 = -p,$$

et les équations (g′) deviennent :

$$(g'') \qquad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{dp}{dx} = 0, \\ -\frac{dp}{dy} = 0, \\ -\frac{dp}{dz} = 0, \end{array} \right.$$

ce qui indique que, *dans un pareil système, l'intensité de la force normale à l'élément plan resterait constante, quelles que fussent la situation et l'orientation de cet élément.*

CHAPITRE II.

REVUE DES PRINCIPES GÉNÉRAUX DE DYNAMIQUE.

ARTICLE 1er. — DES FORCES CONSIDÉRÉES AU POINT DE VUE LE PLUS GÉNÉRAL.

25. *Des forces considérées comme effets de mouvement.* — Nous avons vu, dans ce qui précède, comment les considérations de la statique élémentaire conduisaient aux conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces, ces forces étant exprimées en unités de poids et représentées par des lignes proportionnelles à ces nombres; mais j'ai déjà dit, au numéro 1, que toute force résultait réellement de l'action réciproque de deux corps, action tendant à modifier l'état de repos ou de mouvement de ces corps, et c'est à ce point de vue plus général, appartenant surtout à la dynamique, que je vais maintenant considérer les forces.

Une force peut se mesurer par les effets du mouvement qu'elle produit, et l'expérience démontre tous les jours que, si un corps a été déplacé d'une certaine quantité par un certain effort, l'effet de cet effort est détruit par celui d'un autre effort qui aurait, à lui seul, déplacé le corps de la même quantité, mais en sens contraire : de là l'idée d'égalité et, par conséquent, un mode d'estimer les forces indépendant de leur nature même, ce qui permet de les considérer comme des effets de mouvement. On pourrait dès lors définir la force comme l'action d'un corps pouvant faire passer un autre corps de l'état de repos à celui de mouvement, ou de l'état de mouvement à l'état de repos, ou, plus généralement, *l'action d'un corps sur un autre corps pouvant changer les conditions de son mouvement.* Mais, s'il est évident que l'effet d'une force sur un corps est de modifier son état de repos ou de mouvement, il ne l'est pas moins qu'une même force ne produira pas un effet identique sur tous les corps, et c'est de cette propriété, en vertu de laquelle les mouvements des divers corps sont différemment variés sous l'action de la même force, que naît l'idée de leur *masse.* C'est là une idée qu'il faut bien asseoir, et, pour cela, il faut, avant tout, définir les éléments principaux de tout mouvement.

26. *Principaux éléments du mouvement.* — Supposons que tous les points d'un corps ou système de points matériels soient rapportés à trois axes de coordonnées rectangulaires. Les coordonnées sont, pour chaque point du système, des nombres invariables dans le cas de l'équilibre du système, mais elles deviennent nécessairement variables avec le temps, si le corps se déplace et que les axes restent fixes. Dans ce mouvement, chaque point du système suit une trajectoire déterminée par la nature du mouvement, et les coordonnées du point changent à mesure qu'il marche sur cette ligne dans l'espace, et, si l'on veut se rendre compte de l'effet de ce mouvement entre deux points donnés de la trajectoire, points dont les coordonnées seraient fixes, on se dira que le mobile a parcouru telle distance dans tel temps. Le rapport de la distance parcourue au temps employé à la parcourir est donc la première mesure qui se présente à l'esprit pour estimer le degré de rapidité du mouvement. Lorsque ce rapport reste constant, quelle que soit la durée du mouvement, ce mouvement est *uniforme*. Il est *varié* lorsque le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir varie à chaque instant du mouvement.

L'unité à laquelle se rapportent les espaces parcourus est l'unité de longueur ou le mètre. L'unité de temps est la seconde sexagésimale ou la 86 400e partie du jour solaire moyen, divisé, comme on le sait, en 24 heures, l'heure étant divisée en 60 minutes, et la minute en 60 secondes.

27. *Vitesse, accélération, masse.* — Dans le mouvement uniforme, la vitesse s'exprime en unités de longueur par unité de temps; l'espace parcouru étant proportionnel au temps employé à le parcourir, il est clair que, si l'on porte sur une ligne horizontale prise pour ligne des abscisses les valeurs du temps comptées à partir de l'origine du mouvement, et si l'on porte sur les ordonnées correspondantes les espaces parcourus, les points déterminés par ces ordonnées seront tous sur une ligne droite passant par l'origine des coordonnées. Tout mouvement uniforme et rectiligne ne peut d'ailleurs être produit que par une force instantanée, c'est-à-dire par une force qui n'agirait sur le mobile que pendant un temps très court; le mobile prendrait sous cette impulsion une vitesse et une direction qu'il conserverait ensuite indéfiniment. Mais lorsque les forces varient d'intensité et de direction avec le temps, les trajectoires parcourues ne sont plus, en général, rectilignes, ni les vitesses constantes. Dans un pareil mouvement, la vitesse V d'un point au bout du temps t est le rapport $\frac{ds}{dt}$ de l'élément ds de trajectoire parcouru au temps infiniment petit dt employé à la parcourir. Cette expression de la vitesse dans le mouvement varié est évidente,

si l'on admet que le mouvement soit uniforme pendant la durée infiniment petite de l'instant dt: mais elle se déduit plus rigoureusement des considérations suivantes : si Δt représente un certain accroissement fini, très petit, du temps au bout du temps t, et Δs la longueur de l'arc parcouru pendant ce temps par le mobile sur la trajectoire, la vitesse serait représentée par $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, si ce rapport était constant, c'est-à-dire si Δs était proportionnel à Δt; mais la valeur de ce rapport dépend généralement de la grandeur absolue de Δt, ce qui suffit à démontrer que l'on ne saurait ici attribuer à cet accroissement une valeur finie. Cette valeur ne pourrait, en effet, être qu'arbitraire et, de plus, elle ferait dépendre la vitesse au bout du temps t des modifications que le mouvement pourrait subir après ce temps; ce qui est inadmissible. Il faut donc nécessairement que l'accroissement Δt devienne plus petit que toute grandeur donnée, et dès lors l'expression de la vitesse au bout du temps t ne peut être donnée que par la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ à mesure que Δt tend vers zéro, c'est-à-dire par la dérivée de premier ordre $\frac{ds}{dt}$ de l'expression analytique de l'espace parcouru par rapport au temps; de sorte que, si cette expression est

$$s = f(t),$$

la vitesse V au bout du temps t aura pour expression

$$V = \frac{ds}{dt} = f'(t);$$

si $f(t)$ est donnée, V s'en déduit donc par une différentiation, et, réciproquement, si V était donné en fonction de t et par la relation

$$V = \varphi(t),$$

on en déduirait par l'intégration

$$s = \int V\,dt = \int \varphi(t)\,dt + \text{const.}$$

Nous ferons remarquer maintenant que la vitesse allant, dans le mouvement varié, en s'accélérant ou en se ralentissant avec le temps, l'accroissement positif ou négatif que prend cette vitesse pendant l'unité de temps varie lui-même avec le temps. La mesure de cette vitesse de la vitesse, si l'on peut employer cette expression, ou de *l'accélération*, pour employer le terme consacré par l'usage, s'obtient par des considérations analogues à celles que je viens

de faire valoir, et son expression est $\frac{dV}{dt}$; de sorte que, si nous représentons par j l'accélération, le mouvement étant quelconque, on aura

$$j = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 f(t)}{dt} = f''(t).$$

L'accélération étant définie, nous arrivons à la définition de la masse, et je commence par formuler un principe qu'il faut tenir pour évident.

Le rapport de l'intensité d'une force à l'accélération qu'elle produit est constant. Si F, F', F'' représentent diverses forces, j, j', j'' les accélérations qui leur correspondent, on aurait, d'après ce premier principe,

$$\frac{F}{j} = \frac{F'}{j'} = \frac{F''}{j''} = m,$$

m étant un nombre constant pour un même corps. C'est ce nombre que l'on appelle la masse du corps.

On tire de là

$$F = mj, \quad F' = mj'. \quad F'' = mj''.$$

Si deux forces F, F' communiquent une même accélération à deux corps de masses différentes m, m', on peut poser dans ce cas, d'après les relations précédentes :

$$F = mj, \qquad F' = m'j;$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'},$$

c'est-à-dire que *les forces sont proportionnelles aux masses quand elles produisent sur ces masses la même accélération.*

On déduirait encore des relations précédentes

$$\frac{F}{F'} = \frac{j}{j'},$$

soit *la proportionnalité des forces aux accélérations qu'elles produisent sur une même masse.*

Considérons maintenant un corps soumis à la seule action de la pesanteur. Nous savons que cette action, qui attire les corps vers le centre de la terre, est continue (n° 2) et toujours la même, et cela, que les corps soient à l'état

d'équilibre ou à l'état de mouvement. L'expérience constate, en effet, que tout corps pesant tombant dans le vide en un lieu déterminé prendra constamment, suivant la verticale du lieu, le même accroissement de vitesse dans l'unité de temps. La valeur numérique de cette accélération constante est à Paris et à l'altitude zéro, c'est-à-dire au niveau de la mer, égale à $9^m,8088$, soit en nombre rond $9^m,809$. Nous verrons plus loin comment cette accélération, constante pour un même lieu, varie avec la latitude et l'altitude des lieux; mais, pour le moment, nous pouvons, en supposant que nous ne changions pas de lieu, regarder l'accélération g de la pesanteur comme constante et poser

$$g = 9^m,809.$$

Si l'on désigne maintenant par P le poids d'un corps et par m sa masse, on aura, d'après les relations posées plus haut entre les forces et leurs accélérations,

$$P = mg,$$

d'où

$$m = \frac{P}{g};$$

si w désigne d'ailleurs le volume du corps et π le poids de son unité de volume, on aura

$$P = \pi w,$$

d'où

$$m = \frac{\pi}{g} \cdot w.$$

Dans cette expression $\frac{\pi}{g}$ est la masse de l'unité de volume ou ce qu'on appelle en mécanique la *densité;* de sorte que, si l'on désigne cette densité par ρ, on aura

$$\rho = \frac{\pi}{g},$$

d'où

$$\pi = \rho g;$$

on aura dès lors pour exprimer la masse les trois expressions suivantes :

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} m = \dfrac{P}{g}, \\ m = \dfrac{\pi w}{g}, \\ m = \rho w. \end{cases}$$

On pourra se servir, suivant les données de la question, de l'une ou de l'autre de ces trois expressions, qui sont équivalentes. C'est de la troisième de ces expressions que je me suis servi au numéro 24 pour la masse $\rho\, dx\, dy\, dz$ de l'élément de volume $dx\, dy\, dz = dw$.

28. *Forces rapportées à l'unité de masse.* — Nous savons maintenant mesurer les masses, et les forces elles-mêmes peuvent se rapporter à l'unité de masse, au lieu de les rapporter, comme on l'a fait dans la statique, à l'unité de poids, et elles sont, dans ce nouvel ordre d'idées, mesurées par les vitesses qu'elles impriment à l'unité de masse dans l'unité de temps. C'est ce qui résulte des relations que nous avons établies plus haut entre les forces, leurs accélérations et les masses. La force étant rapportée maintenant à l'unité de masse, *l'unité absolue de force* devient pour nous *la force qui, agissant sur l'unité de masse pendant l'unité de temps, produit l'unité de vitesse.*

Le poids d'une unité de masse a pour valeur, en unités absolues de force, l'accélération g de la pesanteur; c'est ce que démontre immédiatement la première des relations (D) si l'on y fait $m = 1$, puisqu'elle donne $P = g$. Le poids d'un corps ayant l'unité pour masse serait donc de $9^k,809$.

Si dans la première des formules (D), au lieu de faire $m = 1$, on faisait $P = 1$, elle donnerait $m = \frac{1}{g} = \frac{1}{9.809} = 0,102$. Ce nombre 0,102 exprimerait donc la masse d'un corps dont le poids serait de 1 kilogramme ou l'unité de poids.

L'unité de masse est arbitraire en définitive, puisque la masse n'est qu'un rapport, celui de la force à l'accélération qu'elle produit, et l'on peut dès lors toujours choisir cette unité de manière que l'on ait $P = mg$, suivant la première des équations (D).

Je ferai remarquer, d'ailleurs, que, dans l'expression $m = \frac{P}{g}$, m est une quantité constante, attendu que, si la force P et son accélération g varient avec l'altitude et la latitude du lieu, elles varient dans le même rapport. L'unité de masse est donc pour la mesure des forces plus générale et plus rationnelle que l'unité de poids, puisque celle-ci varie d'un lieu à un autre, tandis que la première reste constante pour le monde entier.

29. *Quantité de mouvement.* — Je ferai remarquer maintenant que, si l'accélération est constante, on peut, en se rappelant que l'expression de cette accélération est $\frac{dV}{dt}$, poser la relation

$$\frac{dV}{dt} = j,$$

dans laquelle j est constant. On en déduit immédiatement par l'intégration, et en supposant la vitesse initiale nulle,

$$V = jt.$$

Si l'on considère maintenant une autre accélération constante j' et que V' soit la vitesse correspondante, on aura de même

$$V' = j't,$$

d'où, pour une même valeur de t, on déduit

$$\frac{V}{V'} = \frac{j}{j'}.$$

Les vitesses sont donc, lorsque la vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire lorsque le corps part du repos, proportionnelles aux accélérations, et, comme on a vu plus haut que l'on avait

$$F = mj, \qquad F' = mj',$$

on en déduit immédiatement

$$\frac{F}{F'} = \frac{mV}{m'V'}.$$

Il résulte de là que, *lorsqu'un corps part du repos pour se mettre en mouvement, les forces sont entre elles comme les quantités de mouvement.* La quantité de mouvement donne donc une nouvelle mesure de la force. Il faut remarquer toutefois que, pour les forces continues qui produisent des vitesses allant en s'accélérant, comme la pesanteur par exemple, la définition de la force par le produit de la masse et de la vitesse n'est plus suffisante, et il faut y ajouter l'idée du temps pendant lequel s'exerce l'action de la force. Il faut donc, pour définir complètement une pareille force, dire qu'elle est capable d'imprimer à telle masse telle vitesse dans tel temps, et la valeur de la force F peut être exprimée par le nombre représentant le produit mj de la masse m par la vitesse j qu'elle est capable de lui imprimer dans l'unité de temps. Il résulte de là que le nombre P, qui représente le poids d'un corps ou la valeur en unité de poids de l'action qu'exerce sur ce corps la pesanteur, et le nombre mg, qui représente la quantité de mouvement que l'accélération g de la pesanteur imprimerait à ce corps dans l'unité de temps, sont également propres à représenter la force que la gravité développe sur le corps donné. Les nombres P

et mg sont donc nécessairement proportionnels, et, comme l'unité de masse est arbitraire, on peut écrire

$$P = mg,$$

ce qui ramène à la première des expressions (D) et ne fait que confirmer ce qui a été dit aux numéros 26 et 27.

30. *Composition des vitesses et accélérations.* — On vient de voir que, pour les forces constantes et pour celles qui donnent des accélérations constantes, les forces sont entre elles comme les vitesses qu'elles impriment à une même masse. Lorsque ces forces varient avec le temps, elles sont proportionnelles aux accélérations ou aux accroissements que subissent les vitesses dans l'unité de temps. Il résulte immédiatement de ces relations entre les forces et les vitesses ou les accélérations que tous les principes de composition et de décomposition des forces qui ont été établis au chapitre Ier s'appliquent également aux vitesses et aux accélérations, et c'est cette considération qui a donné naissance à la cinématique ou mécanique géométrique élémentaire, dans laquelle on part de ces propriétés de composition et de décomposition des vitesses et des accélérations pour étudier les mouvements indépendamment des causes qui les produisent. La cinématique simplifie très certainement les questions de mouvement, qu'elle traite indépendamment des idées de masse et d'inertie inséparables de la mécanique véritable; elle met à la portée de tout le monde ce qu'il y a, pour ainsi dire, de palpable dans les mouvements, mais elle a le grave inconvénient de laisser ceux qui l'étudient exclusivement dans la plus profonde ignorance sur les causes dominantes du mouvement et de faire, par conséquent, une complète abstraction du côté philosophique de la mécanique. Je tiens, en ce qui me concerne, pour la vieille école, ainsi que je l'ai déjà dit dans mon introduction. Il ne faut pas oublier d'ailleurs que c'est Lagrange qui en est le grand maître, et l'on peut, sans risque, s'enrôler sous son drapeau.

Il résulte de l'assimilation faite plus haut entre les forces et les vitesses ou les accélérations qu'elles produisent que, si u, v, w sont les composantes de la vitesse V suivant les trois axes de coordonnées rectangulaires des x, y, z ou les projections de cette vitesse sur les axes, on aura, entre la vitesse et les composantes, les mêmes relations que celles que nous avons établies au numéro 6 entre la force et ses trois composantes rectangulaires, soit

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

et les cosinus des angles que fait la direction de la vitesse V avec les axes ont pour expressions :

$$\frac{u}{V}, \qquad \frac{v}{V}, \qquad \frac{w}{V}.$$

Si l'on désigne d'ailleurs par dx, dy, dz les projections sur les trois axes du déplacement ds, on aura

$$V = \frac{ds}{dt}, \qquad u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt};$$

d'où

$$ds = V dt, \qquad dx = u dt, \qquad dy = v dt, \qquad dz = w dt.$$

Le calcul différentiel conduit, entre ds et dx, dy, dz, à la relation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

d'où

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

relation qui ne fait que reproduire, sous une autre forme, la relation donnée tout à l'heure entre V et u, v, w.

Pour les accélérations $\frac{d^2s}{dt^2}$, dont $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ sont les composantes suivant les trois axes, on aurait de même la relation

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2.$$

Il faut se familiariser avec les diverses expressions qui viennent d'être données, attendu qu'elles se représentent à chaque instant dans la mécanique; elles ne sont que la conséquence du parallélogramme des forces appliqué aux vitesses et aux accélérations. Ce principe s'applique d'ailleurs aussi, en cinématique, à la composition et à la décomposition *des mouvements*. Cette expression n'est pas heureuse, à mon sens, et je préférerais celle de composition *des déplacements*, attendu que le principe du parallélogramme ne peut s'appliquer que lorsque les axes des trajectoires sont assez petits pour être regardés comme des lignes droites, et que dès lors il ne peut être question que de ces mouvements élémentaires que l'on désigne généralement par le mot *déplacements*.

31. *Composition des déplacements; mouvements relatifs.* — Le déplacement

résultant de deux déplacements dont les directions se rencontrent est représenté en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme, dont les côtés représentent en grandeur et en direction ces deux déplacements. Si l'on désigne par δx, δy, δz trois déplacements sur les axes qui ont lieu à partir du point dont les coordonnées sont x, y, z, le déplacement résultant δs aura pour expression

$$(\delta s)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2,$$

et les cosinus des angles que fera δs avec les axes auront pour expression

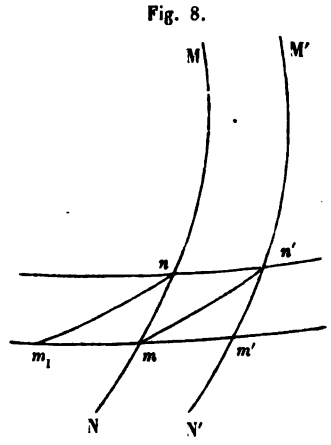
$$\frac{\delta x}{\delta s}, \quad \frac{\delta y}{\delta s}, \quad \frac{\delta z}{\delta s}.$$

Le parallélipipède des forces, applicable ici, conduit immédiatement à ces dernières relations.

Si l'on avait d'ailleurs à combiner plusieurs déplacements δs, δs_1, δs_2... on appliquerait les règles indiquées au numéro 5 pour les forces, et le principe général auquel satisfont toutes les compositions et décompositions de forces, de vitesses, d'accélérations, de déplacements est que, *en projection sur une ligne droite quelconque, la résultante est égale à la somme des composantes.*

Supposons maintenant qu'un point matériel parcoure une trajectoire MN (fig. 8), et que cette trajectoire elle-même participe au mouvement d'un système, de telle sorte que, dans un intervalle de temps très petit, la trajectoire MN prenne la position M'N'. Un point m pris sur la trajectoire MN participerait à deux mouvements, l'un qui, dans le même intervalle très petit de temps, le portera de m en n sur cette trajectoire, l'autre de m en m' sur la direction du mouvement d'entraînement du système, et le déplacement réel du point pendant ce même intervalle de temps serait mn' ou la diagonale du parallélogramme construit sur les deux déplacements mn et mm', assez petits pour qu'on puisse les considérer comme des lignes droites.

Fig. 8.



Dans un pareil système animé d'un double mouvement, mn représenterait la *vitesse relative* et mm' *la vitesse d'entraînement*, de sorte que *la vitesse absolue mn' serait la diagonale du parallélogramme construit sur la vitesse relative et la vitesse d'entraînement;* d'où l'on conclurait immédiatement, en menant nm_1 parallèle à

n'm, que *la vitesse relative mn est la résultante de la vitesse absolue mn' et de la vitesse d'entraînement mm' prise en sens contraire;* on verrait de même que *la vitesse d'entraînement serait la résultante de la vitesse absolue et de la vitesse relative prise en sens contraire.*

Ces propriétés subsisteraient, d'ailleurs, encore si le système par rapport auquel le point *m* est en mouvement était lui-même en mouvement par rapport à un autre système, et l'on pourrait composer les déplacements ainsi que les vitesses dus à cette série de mouvements comme on compose un système de forces.

Si nous revenons maintenant au système des déplacements suivant trois axes rectangulaires des coordonnées, nous pouvons regarder les composantes u, v, w de la vitesse V comme trois vitesses simultanées, et regarder une de ces vitesses comme une vitesse relative et les deux autres comme des vitesses d'entraînement, et la résultante de ces trois vitesses donnera la vitesse absolue V.

On peut donc composer maintenant les mouvements relatifs comme les mouvements absolus, et, il faut bien le dire, il n'y a pas de mouvements absolus qui puissent se rapporter à des points ou à des systèmes parfaitement fixes. Ainsi le mouvement de translation de la terre dans son orbite autour du soleil et son mouvement de rotation diurne autour de son propre axe font qu'il n'y a pas un seul point de sa surface qui soit réellement fixe; mais comme nous participons à ce double mouvement, qui nous entraîne et nous fait tourner en même temps que la terre, les points que nous considérons à sa surface nous paraissent fixes, et c'est ainsi que l'on est conduit à admettre ce principe général *qu'un mouvement relatif de deux systèmes n'est pas altéré lorsqu'on leur imprime à tous deux un mouvement d'entraînement* (ou du moins de translation). Un autre principe des mouvements relatifs est que, *si un point matériel est soumis à plusieurs mouvements simultanés, chacune des forces ou des vitesses qui agissent sur ce point matériel produit son effet comme si elle agissait seule, c'est-à-dire qu'elle fait parcourir au point et parallèlement à sa propre direction le même espace que si elle agissait isolément.*

Je ne connais pas de démonstration de ce second principe, et il n'est pas de nature à être directement vérifié par l'expérience, mais il se vérifie par l'accord avec les faits des conséquences analytiques qu'on en déduit, et c'est surtout l'astronomie qui fournit ces vérifications pratiques. Sa démonstration se fera peut-être encore longtemps attendre, comme il en a été pour le principe des vitesses virtuelles, dont la première démonstration rigoureuse a été

donnée plus d'un siècle après que Galilée en avait fait les premières applications.

32. *Inertie.* — La dynamique est, par rapport au mouvement produit par l'action des forces, ce que la statique est par rapport à leur équilibre, et la différence des résultats ne tient absolument qu'à l'introduction, par la dynamique, d'une force spéciale qui se manifeste dans tout mouvement; de sorte que, si l'on pouvait établir *a priori* les équations générales du mouvement d'un corps ou système de corps, ces équations conduiraient immédiatement à celles de l'équilibre, à la seule condition d'y annuler cette force spéciale, qui est *l'inertie;* et, réciproquement, les équations de l'équilibre conduisent à celles du mouvement, comme on le verra tout à l'heure, en y introduisant cette force, qui demande maintenant à être clairement définie, puisqu'elle joue un rôle aussi considérable dans les lois de la mécanique.

L'inertie est une propriété évidente dans les corps en repos, et un corps en repos ne peut pas passer de lui-même à l'état de mouvement. Il ne pourrait pas davantage passer de lui-même de l'état de mouvement à l'état de repos. C'est là un fait parfaitement constaté et que l'expérience vérifie journellement. Il s'ensuit que, si un corps est en mouvement, il tendra, en vertu de *son inertie*, à continuer son mouvement et à résister en même temps à toute force tendant à modifier ce mouvement de quelque manière que ce soit. L'inertie constitue dès lors une véritable force, et il s'agit d'en trouver l'expression.

Pour chaque point de masse m d'un corps quelconque soumis à la force F donnant lieu à une accélération j, on a, comme on l'a déjà vu plus haut, la relation

$$F = mj,$$

de sorte que la somme des projections des forces sur un axe quelconque est égale à une somme d'expressions de la forme $mj \cos \delta$, δ étant l'angle de cet axe avec la direction de la force; or, si l'on remarque que l'expression précédente peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$F - mj = 0,$$

on pourra dire que mj représente la réaction opposée par le point de masse m à la force F, réaction qui est, comme on le sait, égale à l'action[1] et qu'on

[1] C'est à Newton que l'on doit le principe de l'égalité de l'action et de la réaction que confirme l'expérience.

nomme force d'inertie du point. Donc $\Sigma\, mj \cos\delta$ représentera la projection de la réaction totale opposée par le corps aux forces qui le sollicitent, réaction qui se composera en général de plusieurs résultantes, et qu'on appelle *réaction d'inertie d'un corps*. La *force d'inertie* est la résultante de toutes ces réactions transportées en un même point de l'espace, et l'on voit qu'elle doit faire équilibre à la résultante des forces qui agissent sur le corps, transportées en ce même point.

Il résulte de là que, *à un instant quelconque du mouvement, il y a équilibre entre les forces extérieures et les forces d'inertie.*

Je ferai remarquer, en terminant, que l'inertie joue, comme la pesanteur, le rôle d'une force répartie entre tous les éléments du volume des corps.

33. *Équations du mouvement.* — L'énoncé qui vient d'être indiqué est, à la forme près, celui du *principe de d'Alembert.* On trouve des démonstrations de ce principe dans les traités de mécanique, mais ce principe n'est même plus nécessaire, étant admis que le mot *inertie* exprime le produit de la masse d'un corps par son accélération, produit qui revient à la résultante des réactions que le corps exerce et qui sont égales et opposées aux actions qu'il reçoit, ainsi que l'a fait remarquer M. de Saint-Venant dans son étude sur la constitution des atomes (pages 39 et 40).

En introduisant les inerties comme forces dans les équations *de l'équilibre statique*, on arrive donc aux équations de *l'équilibre dynamique* qui régissent le mouvement, et l'on n'a plus besoin d'invoquer le principe de d'Alembert, qui, dans la plupart des traités de mécanique, a un autre énoncé que celui que l'auteur lui-même en a donné dans sa *Dynamique*, et dont l'intelligence n'est pas toujours exempte d'embarras, pour me servir des propres expressions de M. de Saint-Venant. Il suffit de savoir que, dans tout mouvement, le système des forces qui agissent sur un corps, en y comprenant les forces d'inertie, devra se faire équilibre sur lui. C'est donc qu'en chaque point la force d'inertie est égale et contraire à la résultante des autres forces, ou, en d'autres termes, que l'accélération de chacun de ces points est due à ces forces.

Les forces d'inertie, pour chaque point de masse m, donnent, suivant les trois axes rectangulaires des coordonnées, les composantes

$$m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2},$$

qui doivent être prises en sens contraire des composantes des forces. Si donc

on introduit les inerties dans les équations d'équilibre A et B d'un système quelconque de forces données au numéro 12, celles-ci deviennent

$$\Sigma X - \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$\Sigma Y - \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$\Sigma Z - \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

$$\Sigma\left(Zy - Yz\right) - \Sigma\left(m\frac{d^2z}{dt^2}y - m\frac{d^2y}{dt^2}z\right) = 0,$$

$$\Sigma\left(Xz - Zx\right) - \Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}z - m\frac{d^2z}{dt^2}x\right) = 0,$$

$$\Sigma\left(Yx - Xy\right) - \Sigma\left(m\frac{d^2y}{dt^2}x - m\frac{d^2x}{dt^2}y\right) = 0,$$

qui s'écrivent ordinairement ainsi qu'il suit :

$$(A_2) \qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X, \\ &\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y, \\ &\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z; \end{aligned}\right.$$

$$(B_2) \qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\left(m\frac{d^2z}{dt^2}y - m\frac{d^2y}{dt^2}z\right) = \Sigma\left(Zy - Yz\right), \\ &\Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}z - m\frac{d^2z}{dt^2}x\right) = \Sigma\left(Xz - Zx\right), \\ &\Sigma\left(m\frac{d^2y}{dt^2}x - m\frac{d^2x}{dt^2}y\right) = \Sigma\left(Yx - Xy\right). \end{aligned}\right.$$

Telles sont les conditions du mouvement d'un système rigide et inextensible soumis à des forces extérieures quelconques.

J'ai fait remarquer, à propos du principe des vitesses virtuelles, au numéro 13, que les conditions (A) et (B) de l'équilibre données au numéro 12 pouvaient se déduire de ce principe, qui devenait ainsi le principe unique duquel découlait toute la statique. On pourrait en dire autant du principe de d'Alembert par rapport à la dynamique. L'ensemble de ces deux principes fondamentaux renfermerait les solutions de toutes les questions de la mécanique définie comme science de l'équilibre et du mouvement, et, comme le principe de d'Alembert n'est même pas nécessaire, ainsi que je l'ai indiqué un peu plus haut, pour ramener toutes les questions de mouvement à des

questions d'équilibre, on peut dire que *c'est le principe des vitesses virtuelles qui renferme toute la mécanique.* On voit, d'ailleurs, combien était rationnel l'ancien ordre d'études, qui commençait par la statique, puisque la simple introduction des inerties réduit toutes les questions de dynamique à des questions de statique. On ne voit vraiment pas qu'il y ait eu de bonnes raisons pour changer tout cela, en laissant pénétrer jusque dans l'enseignement supérieur cette mécanique professionnelle appelée cinématique, qui devrait, à mon sens, être réservée surtout aux écoles des arts et métiers.

Art. 2. — Principes généraux du mouvement.

34. *Mode de déduction de ces principes.* — On peut déduire, des équations (A_2) et (B_2) du mouvement que nous venons d'établir, les principes généraux de la dynamique, comme nous avons déduit, au numéro 12, les principes généraux de la statique des équations (A) et (B) de l'équilibre.

35. *Principe du mouvement du centre de gravité.* — Nous reprenons ici les relations (D') trouvées au chapitre précédent, numéro 21, pour les coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre de gravité d'un système de corps,

$$Px_1 = \Sigma px,$$
$$Py_1 = \Sigma py,$$
$$Pz_1 = \Sigma pz,$$

en faisant remarquer que, d'après la première des relations (D) du numéro 27, on a, en désignant par M et m les masses totale et individuelle :

$$P = \frac{M}{g},$$
$$p = \frac{m}{g}.$$

Les trois équations précédentes deviennent donc :

$$Mx_1 = \Sigma mx,$$
$$My_1 = \Sigma my,$$
$$Mz_1 = \Sigma mz;$$

d'où l'on déduirait :

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2};$$

et, en vertu de ces dernières équations, les équations (A_2) du numéro 33 deviennent :

$$(K)\qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma X, \\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma Y, \\ M\dfrac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma Z. \end{cases}$$

Ces trois équations établissent le principe du mouvement du centre de gravité, qui s'énonce ainsi qu'il suit :

Le centre de gravité d'un système solide se meut comme si toute la masse y était concentrée et que les forces extérieures y fussent directement appliquées.

36. *Principe des quantités de mouvement.* — Les équations (A_2) du numéro 33 peuvent s'écrire de la manière suivante, en se rappelant que l'on a $\frac{dx}{dt}=u$, $\frac{dy}{dt}=v$, $\frac{dz}{dt}=w$:

$$\Sigma m\frac{du}{dt}=\Sigma X,$$

$$\Sigma m\frac{dv}{dt}=\Sigma Y,$$

$$\Sigma m\frac{dw}{dt}=\Sigma Z,$$

et, si on les multiplie par dt, elles deviennent :

$$\Sigma m\,du=\Sigma X\,dt,$$

$$\Sigma m\,dv=\Sigma Y\,dt,$$

$$\Sigma m\,dw=\Sigma Z\,dt.$$

Le produit $F\,dt$ d'une force par le temps infiniment petit dt pendant lequel elle agit est ce qu'on appelle *l'impulsion élémentaire* de cette force, et *l'impulsion*

de la force est l'intégrale $\int F dt$ prise entre les limites du temps pendant lequel cette force agit.

Les équations précédentes, étant intégrées, deviennent :

$$(1)\qquad \begin{cases} \Sigma m(u-u_0) = \Sigma \int_{t_0}^{t} X dt, \\ \Sigma m(v-v_0) = \Sigma \int_{t_0}^{t} Y dt, \\ \Sigma m(w-w_0) = \Sigma \int_{t_0}^{t} Z dt, \end{cases}$$

u_0, v_0, w_0 étant les valeurs des vitesses u, v, w pour la valeur t_0 du temps.

Les premiers membres de ce système d'équations représentent les accroissements des quantités de mouvement en projection sur les trois axes rectangulaires des coordonnées, et les seconds membres, les impulsions des forces entre les valeurs t_0 et t du temps projetées sur les mêmes axes. Le système (1) conduit à l'énoncé suivant du *principe des accroissements des quantités de mouvement*, en faisant remarquer que, s'il est vrai pour trois axes rectangulaires entre eux, il le sera pour un axe quelconque :

En projection sur un axe quelconque, la somme des accroissements des quantités de mouvement est égale à la somme des impulsions des forces extérieures, ou, en d'autres termes, *la somme des accroissements des quantités de mouvement et celle des impulsions des forces, prise en sens contraire, se font équilibre si on les considère comme des forces et qu'on les transporte en un même point.*

Cet énoncé, qui exprime *l'équilibre dynamique de translation*, est analogue à celui du principe de *l'équilibre statique de translation* exprimé au chapitre précédent, à la fin du numéro 12.

Si, au lieu d'accroissement, il y avait perte de quantité de mouvement, l'énoncé du principe deviendrait le suivant :

En projection sur un axe quelconque, la somme des pertes des quantités de mouvement est égale à la somme des impulsions des forces extérieures.

Le théorème des accroissements des quantités de mouvement s'applique à tous les corps, et, tant qu'on n'admet pas de déplacements incompatibles avec les liaisons du système, il n'y a pas lieu de le modifier. Du reste, les forces intérieures se détruisent, en général, deux à deux, ainsi que leurs impulsions; et si l'on n'admettait pas cette restriction, il faudrait étendre le mot *extérieures* tant aux forces extérieures proprement dites qu'aux forces de liaison. Cette remarque permet d'appliquer le théorème des quantités de mouvement aux fluides; c'est elle qui justifie aussi son emploi dans le choc.

37. *Principe des moments des quantités de mouvement.* — Prenons maintenant les équations (B_2) du numéro 33 : considérons, par exemple, la troisième équation de ce groupe :

$$\Sigma m\left(\frac{d^2y}{dt^2}x-\frac{d^2x}{dt^2}y\right)=\Sigma\left(Yx-Xy\right).$$

Elle peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y\right)=\Sigma\left(Yx-Xy\right)=M_z.$$

M_z étant la projection sur l'axe des z de l'axe du moment des forces extérieures, cette quantité est bien égale à la somme des axes des moments des diverses forces projetées sur l'axe des z. Chacun de ces moments est de la forme $Yx-Xy$, ainsi qu'il est facile de le voir et comme on l'a déjà établi au chapitre précédent, numéro 9. Il est également facile de voir que l'expression

$$m\left(\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y\right)$$

représente le moment de la quantité de mouvement du point de masse m projeté sur l'axe des z, et si l'on désigne par L_x, L_y, L_z les projections, sur les trois axes rectangulaires des coordonnées, de l'axe L de ce moment, les équations (B_2) peuvent, d'après ce qui vient d'être dit, s'écrire sous la forme très simple qui suit :

$$\frac{d}{dt}\left(L_x\right)=M_x,$$
$$\frac{d}{dt}\left(L_y\right)=M_y,$$
$$\frac{d}{dt}\left(L_z\right)=M_z.$$

En multipliant ces équations par dt et en les intégrant ensuite entre les limites t_0 et t, on a :

$$(m)\qquad \begin{cases} L_x-L_{ox}=\int_{t_0}^{t}M_x\,dt,\\ L_y-L_{oy}=\int_{t_0}^{t}M_y\,dt,\\ L_z-L_{oz}=\int_{t_0}^{t}M_z\,dt.\end{cases}$$

Ce système d'équations conduit immédiatement à l'énoncé du *principe des moments des quantités de mouvement :*

En projection sur un axe quelconque, la somme des accroissements des moments des quantités de mouvement est égale au moment de l'impulsion totale des forces extérieures.

S'il y avait perte au lieu d'accroissement du moment de la quantité de mouvement, l'énoncé de ce théorème se modifierait comme nous l'avons fait pour le théorème des quantités de mouvement; on se rappellera d'ailleurs toujours que, si le corps est *déformable*, le mot *extérieures* comprend, outre les forces extérieures proprement dites, les forces de liaison, et l'on pourra même faire abstraction de celles-ci, comme ayant deux à deux des moments totaux nuls, si elles sont constamment égales et opposées deux à deux, ainsi qu'il arrive toujours dans la nature.

38. *Principe des forces vives.* — On appelle *force vive* d'un point de masse m en mouvement le produit mV^2 de sa masse par le carré de sa vitesse ou le produit de sa quantité de mouvement mV par sa vitesse V.

Le *travail élémentaire* d'une force est le produit $R(\cos R, ds)\,ds$ de son intensité R par la projection $ds\cos(R, ds)$ sur la direction de la force de son déplacement ds suivant la trajectoire du mouvement du point matériel de masse m auquel la force est appliquée. Le *travail de la force* entre deux valeurs t_0 et t du temps auxquelles correspondent les valeurs s_0 et s des arcs de trajectoire, comptés à partir d'un point fixe pris sur cette trajectoire, est représenté par l'intégrale $\int_{s_0}^{s} R(\cos R, ds)\,ds$.

Il est facile de voir d'ailleurs que l'expression du travail élémentaire de la force, tel qu'il vient d'être défini, revient à dire que ce travail est le produit de la force par le déplacement dr dans la direction de la force, qu'on a, en un mot, $R\cos(R, ds)\,ds = R\,dr$.

Ces définitions données, reprenons l'équation générale du principe des vitesses virtuelles donnée au chapitre précédent (n° 13):

$$\text{(b)} \qquad \Sigma F(\cos F, \delta s)\,\delta s = 0,$$

dans laquelle δs désigne un déplacement quelconque, mais qui soit compatible avec les liaisons du système. Si nous désignons toujours par X, Y, Z les composantes d'une force suivant les trois axes rectangulaires des coordonnées, et que l'on considère chacune de ces composantes comme une force se déplaçant dans sa propre direction, la condition précédente deviendra

$$\text{(b')} \qquad \Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0.$$

En introduisant dans cette équation les inerties $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$, elle s'appliquera au mouvement, et l'on aura

$$\text{(n)} \qquad \Sigma\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\Sigma\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\Sigma\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z=0;$$

mais il faut bien remarquer que, dans l'équation (b), le symbole δ ne s'applique qu'aux déplacements compatibles avec les liaisons; or, pour un pareil déplacement, la somme des travaux dus aux forces de liaison est nulle, de sorte que l'équation (b) subsiste, en comprenant dans le symbole F les forces *extérieures et intérieures*, à l'exclusion des forces de liaison. Il suit de là que, dans l'équation (n), X, Y, Z désignent maintenant les composantes suivant les axes des forces *extérieures et intérieures*.

Faisons remarquer que les conditions de liaison du système ne contiennent pas, en général, le temps dans leurs expressions, et dès lors les composantes δx, δy, δz du déplacement δs peuvent se remplacer par les composantes dx, dy, dz du déplacement réel ds sur la trajectoire, et l'équation (n) devient

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right)=\Sigma\left(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\right),$$

en intégrant et en se rappelant, d'ailleurs, les expressions

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

et

$$V=\frac{ds}{dt}.$$

On déduit de là la relation

$$\text{(L)} \qquad \Sigma\frac{mV^2}{2}=\Sigma\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)+\text{const.}$$

Mais si l'on désigne par R la résultante des forces X, Y, Z, on sait que l'on a

$$R(\cos R\,ds)\,ds=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz,$$

relation qui dérive immédiatement de l'application du principe des vitesses virtuelles symbolisé par l'équation (b). L'équation (L) peut dès lors se mettre sous la forme suivante, en faisant disparaître sa constante par la condition que $V=V_0$ pour $s=s_0$ et mettant le second membre sous forme d'intégrale définie :

$$\text{(L')} \qquad \Sigma\frac{mV^2-\Sigma mV_0^2}{2}=\Sigma\int_{s_0}^{s}R(\cos R\,ds)\,ds,$$

ou bien

$$\frac{\Sigma mV^2 - \Sigma mV_0^2}{2} = T,$$

si T désigne *la somme totale des travaux des forces tant extérieures qu'intérieures.* Telle est l'équation des forces vives, qui conduit immédiatement à l'énoncé du théorème suivant :

Le demi-accroissement de la force vive dans un temps donné d'un système quelconque en mouvement est égal au travail total produit pendant le même temps par les forces, tant extérieures qu'intérieures, qui le sollicitent.

Il est toujours entendu, d'ailleurs, que, si les déplacements sont assujettis à être compatibles avec les liaisons du système, il ne faut pas faire entrer dans ces forces celles qui proviennent des liaisons.

Si l'on se reporte maintenant à l'équation (L'), il faut remarquer que son second membre se compose d'une somme de termes dont les uns peuvent être positifs, les autres négatifs, et si l'on désigne par T_m la somme des termes positifs ou le travail moteur, et par T_r la somme des termes négatifs ou le travail résistant, on pourra la mettre sous la forme

$$\text{(L)} \qquad \Sigma \frac{mV^2 - \Sigma mV_0^2}{2} = T_m - T_r.$$

Lorsque T_m est plus grand que T_r, le premier membre est positif, et cet excédent du travail moteur sur le travail résistant produit de la force vive; cette production de force vive diminue à mesure que T_m diminue par rapport à T_r et elle s'arrête lorsque $T_m = T_r$; en ce moment la force vive se réduit à la force vive initiale $\Sigma \frac{mV_0}{2}$. Enfin, lorsque T_m devient plus petit que T_r, le premier membre de l'équation devient négatif, et l'on a

$$\Sigma \frac{mV^2}{2} < \frac{\Sigma mV_0^2}{2}.$$

Il y a donc, suivant les alternatives du mouvement, transformation d'une partie de la force vive en travail moteur, et inversement; mais la force vive $\Sigma \frac{mV^2}{2}$ ne s'annule jamais, elle ne fait que se transformer et se reproduire sous une autre forme; de sorte que le principe des forces vives est comme l'expression d'une grande loi naturelle et prend une généralité que n'offre aucun des autres principes que nous avons établis dans les numéros 35, 36 et 37.

Lorsque le système est invariable, ce qui est le cas des solides (le mot *solide*

étant entendu dans le sens absolu d'invariabilité complète, qui n'existe, comme on l'a vu, qu'en théorie), les seules forces à faire figurer dans l'équation des forces vives sont les forces extérieures, attendu que, dans ce cas, le travail des forces intérieures est évidemment nul, en vertu de l'invariabilité du système, et, si l'on désigne par dr le déplacement de la force R dans sa propre direction, on aura, comme on l'a déjà dit plus haut,

$$dr = ds\cos(\mathrm{R}\,ds)$$

$$\int_{s_0}^{s} \mathrm{R}(\cos \mathrm{R}\,ds)\,ds = \int_{r_0}^{r} \mathrm{R}\,dr,$$

et l'équation (L′) deviendra

$$(\mathrm{L}'') \qquad \Sigma\frac{m\mathrm{V}^2 - \Sigma m\mathrm{V}_0^2}{2} = \Sigma\int_{r_0}^{r} \mathrm{R}\,dr$$

et, si les forces sont constantes,

$$(\mathrm{L}''_1) \qquad \Sigma\frac{m\mathrm{V}^2 - \Sigma m\mathrm{V}_0^2}{2} = \Sigma\mathrm{R}\left(r - r_0\right).$$

Si l'on différentie l'équation (L′), elle conduit à la relation

$$\Sigma m\mathrm{V}\,d\mathrm{V} = \Sigma\,\mathrm{R}\cos(\mathrm{R}, ds)\,ds,$$

ou, si l'on ne considère qu'un seul point matériel de masse m,

$$m\mathrm{V}\,d\mathrm{V} = \mathrm{R}\cos(\mathrm{R}, ds)\,ds;$$

d'où l'on déduit que *le produit de la quantité de mouvement par la différentielle de la vitesse équivaut au travail élémentaire de la force.*

39. *Cas d'un potentiel; conservation de la force vive.* — Si la fonction $\Sigma(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)$ est une différentielle exacte d'une certaine fonction Φ de x, y, z, on pourra poser

$$\Sigma(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz) = d\Phi,$$

et l'équation des forces vives prendra la forme suivante :

$$(\mathrm{L}''') \qquad \frac{\Sigma m\mathrm{V}^2 - \Sigma m\mathrm{V}_0^2}{2} = \Phi - \Phi_0,$$

Φ_0 étant la valeur que prend la fonction Φ pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Dans ce cas la force vive ne dépend plus que de la fonction Φ, et elle atteindra son maximum et son minimum en même temps que cette fonction, ce qui a lieu lorsqu'on a

$$d\Phi = 0,$$

ou bien

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = 0.$$

Or cette dernière équation est satisfaite par la condition de l'équilibre des forces; d'où résulte cette remarquable conséquence que *la force vive prend son maximum et son minimum lorsque le système se trouve dans des positions telles que les forces qui le sollicitent se font équilibre.*

On a donné à la fonction Φ le nom de *potentiel*, et lorsqu'il existe un potentiel, l'équation L″ démontre qu'il y a *conservation de la force vive*, attendu que son premier membre reprendra la même valeur chaque fois que les points du système viendront à reprendre leurs coordonnées antérieures. On remarquera de plus que, dans ce cas de l'existence d'un potentiel, les intégrations qui déterminent la valeur de Φ qui figure à l'équation L‴ se font sans qu'il soit besoin de connaître les valeurs des coordonnées x, y, z en fonction de t, c'est-à-dire quelles que soient les trajectoires suivies par les points matériels qui composent le système; c'est ce qui n'arrive pas dans tout autre cas, et pour effectuer les intégrations que comporte l'équation L′ qu'il faut employer alors, il est nécessaire de connaître les trajectoires. *Ce n'est donc que dans le cas d'un potentiel que la voie cinématique suivie par le déplacement des points du système reste sans influence sur le travail accompli, qui ne dépend absolument, dans ce cas, que des positions initiale et finale de ces points.*

La force vive se conserverait, d'ailleurs, encore dans le cas où le système en mouvement ne serait sollicité par aucune force. On aurait, en effet, dans ce cas, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, et l'équation L deviendrait

$$\Sigma m V^2 = \Sigma m V_0^2.$$

La force vive due à la vitesse initiale V_0 se conserve donc intégralement et sans modification aucune pendant toute la durée du mouvement.

40. *Séparation du travail des forces extérieures et intérieures.* — Le travail élémentaire d'une force intérieure L a pour expression Ldl, dl désignant le déplacement projeté sur la direction de la force; de sorte que, si l'on désigne par Q l'une quelconque des forces extérieures, le travail total $\Sigma \int R \cos(Rds)\, ds$

des forces tant intérieures qu'extérieures qui constitue le second membre de l'équation L′ des forces vives sera égal à la somme des travaux des forces extérieures et intérieures $\Sigma\int Q \cos(Q, ds)\, ds$ et $\Sigma\int L\, dl$, et, si l'on pose $\Sigma\int Q \cos(Q, ds)\, ds = T_e$ et $\Sigma\int L\, dl = T_i$, l'équation (L′) deviendrait

$$\text{(N)} \qquad \frac{\Sigma m V^2 - \Sigma m V_0^2}{2} = T_e + T_i.$$

Mais, pour pouvoir calculer le terme T_i, qui se compose de termes de la forme $\int L\, dl$, il faudrait connaître la loi suivant laquelle les forces intérieures varient avec les distances l qui séparent leurs points d'application ou, plutôt, avec les distances des molécules des corps sur lesquelles s'exerce leur action; car l'intégration de l'expression $\int L\, dl$ n'est possible qu'à ce prix. Or cette loi est inconnue, comme on l'a vu au numéro 22, et l'on ne pourrait y suppléer que par des hypothèses plus ou moins hasardées. L'équation (N) permettrait toutefois de déterminer le travail total des forces intérieures T_i, connaissant le travail T_e des forces extérieures et la vitesse V que prendrait le système; on pourrait arriver ainsi à la loi expérimentale qui lierait T_i et V ou T_i et T_e, V étant donné; mais cela ne conduirait à rien pour la découverte de la loi qui régit les actions moléculaires, puisque l'on ne pourrait rien en déduire pour la composition de la fonction $L\, dl$. Il n'y a donc pas un très grand intérêt à mettre l'équation des forces vives sous la forme (N); mais elle a sous cette forme l'avantage de se prêter à la définition la plus générale des corps comme systèmes de points matériels vibrants. Il faut, dans un pareil système, séparer les forces intérieures, dont T_i représenterait le travail (vibrations intérieures et forces dynamométriques intérieures), et les forces extérieures, dont T_e représenterait le travail (vibrations extérieures et forces dynamométriques extérieures). L'équation (N) est donc la forme de l'équation des forces vives qui convient le mieux aux corps naturels considérés comme des systèmes matériels vibrants, ainsi qu'on l'admet dans la thermodynamique.

Le terme du travail des forces intérieures disparaît d'ailleurs de cette équation dans trois cas : 1° lorsque le système est absolument invariable, ou qu'il s'agit d'un corps solide dans l'acception mathématique du mot; 2° lorsqu'il s'agit d'un fluide parfait qui n'est soumis à aucun changement de volume; 3° lorsque, le système étant élastique et soumis à des vibrations, celles-ci sont telles qu'il revienne périodiquement au même état moléculaire.

Dans le premier de ces trois cas, on a en effet $dl = 0$; dans le second, on a

$L = o$ ou $dl = o$, et dans le troisième, T_i ou $\Sigma \int L\,dl$ s'annule périodiquement. Il suit de là que, si l'on ne considère que les évolutions périodiques d'un corps élastique, on pourra dans l'équation des forces vives négliger l'action des forces intérieures, et qu'il en sera toujours ainsi pour les solides et les fluides parfaits; c'est donc sous la forme L que l'équation des forces vives est applicable à ces divers cas.

41. *Application du principe des forces vives aux machines.* — Le principe des forces vives s'applique au mouvement des machines, et, sans entrer à cet égard dans des détails qui deviendraient étrangers à mon sujet, je dois cependant indiquer au moins le principe de cette application, ne fût-ce que pour mettre en entière évidence toute la fécondité de cette grande loi des forces vives. Il suffit pour cela d'introduire dans le second membre de l'équation (L') l'expression des résistances que la machine a à vaincre. Si l'on désigne par Q, P les efforts exercés aux points d'application des forces motrices et des résistances passives, et par dq, dp les projections des déplacements des points d'application de ces forces sur leurs directions, si E désigne, d'ailleurs, l'effort à faire pour vaincre les résistances spéciales dues aux frottements, chocs, etc., de le déplacement projeté correspondant, on aura

$$\Sigma \int R \cos(Rds)\, ds = \Sigma \int Q dq - \Sigma \int P dq - \Sigma \int E de,$$

et l'équation (L') deviendra

$$\frac{\Sigma m V^2 - \Sigma m V_0^2}{2} = \Sigma \int Q dq - \Sigma \int P dp - \Sigma \int E de;$$

on tirerait de là, par la différentiation,

$$\Sigma m V\, dV = \Sigma Q dq - \Sigma P dp - \Sigma E de.$$

Si dans le mouvement de la machine la vitesse devenait constante, c'est-à-dire si le mouvement devenait uniforme, on aurait $dV = o$ et, par conséquent,

$$\Sigma Q dq - \Sigma P dp - \Sigma E de = o,$$

équation qui exprime l'équilibre entre le travail moteur et le travail résistant.

Réciproquement, si cet équilibre a lieu, on en déduit que le mouvement devient uniforme, puisque cette dernière équation entraîne la condition

$$\Sigma m V\, dV = o,$$

qui ne peut être satisfaite que par la condition $dV = 0$ ou $V = 0$; mais la condition $V = 0$ n'est pas applicable ici, puisqu'on ne suppose pas que la vitesse initiale de la machine soit nulle, et c'est dès lors la condition $dV = 0$ ou de la vitesse constante qu'il faut admettre.

On arriverait d'ailleurs à cette même condition $dV = 0$ en exprimant que la force vive est un maximum. Il suit de là que *dans toute machine la force vive ne peut atteindre son maximum que dans les périodes du mouvement de la machine où le travail moteur est égal au travail résistant.*

42. *Force vive dans le choc.* — Autrefois on admettait que le choc entre deux corps élastiques se composait de deux périodes séparées l'une de l'autre par l'instant où la compression mutuelle des deux corps atteint son maximum. Dans la première période, la compression va en augmentant de zéro jusqu'à ce maximum, depuis l'instant où le choc commence jusqu'à celui où le maximum a lieu. Dans la seconde période, la compression va en diminuant depuis l'instant de ce maximum, pour devenir nulle à l'instant où, l'effet du choc étant terminé, les corps sont, en vertu de leur élasticité, revenus à leur état primitif. Dans cet ordre d'idées, les percussions reçues par les deux corps étaient égales pendant les deux périodes du choc.

Dans le cas des corps non élastiques, les deux corps prennent une vitesse commune après la première période du choc; d'où l'on déduisait que les vitesses imprimées aux deux corps étaient la moitié de ce qu'elles seraient, toutes circonstances égales d'ailleurs, si les corps étaient élastiques. Cette conséquence était donc, dans l'ancienne théorie, admise pour ainsi dire *a priori*.

M. Résal a, dans une communication faite à l'Académie des sciences[1], établi qu'elle se vérifiait par le calcul, à la seule condition de faire abstraction des frottements des deux corps pendant le choc.

Il a trouvé, en effet, en mettant en équation le problème du mouvement pendant le choc pour les deux cas des corps mous et des corps élastiques, deux expressions de la vitesse normale au contact, et l'expression de cette vitesse pour les corps élastiques reproduit exactement celle de la vitesse pour les corps mous multipliée par le nombre deux. Cette démonstration de fait donnée par M. Résal a été suivie d'une démonstration directe donnée par M. Darboux[2] en partant du principe des forces vives. Je crois devoir donner ici une analyse succincte de ce travail, qui contient toute une série de propositions nouvelles

[1] *Comptes rendus*, tome LXXVIII, page 153, séance du 19 janvier 1874.
[2] *Comptes rendus*, tome LXXVIII, page 1421, séance du 15 mai 1874.

se rattachant au grand principe des forces vives, sur lequel les traités de mécanique ne donnent pas, à mon sens, des développements suffisamment en rapport avec sa haute importance.

Désignons par X, Y, Z les composantes de la percussion agissant sur un point de masse m, et par u, v, w les composantes de la vitesse de ce point au bout du temps t, u_0, v_0, w_0 étant les valeurs de ces composantes au moment où le choc commence, et à partir duquel on comptera le temps. En appliquant ici le principe des quantités de mouvement énoncé au numéro 36, on établira immédiatement entre les quantités qui viennent d'être définies les relations suivantes :

$$m\left(u-u_0\right)=\int_0^t \mathrm{X}\,dt,$$
$$m\left(v-v_0\right)=\int_0^t \mathrm{Y}\,dt,$$
$$m\left(w-w_0\right)=\int_0^t \mathrm{Z}\,dt.$$

Si l'on multiplie ces équations, la première par $\frac{u+v_0}{2}$, la seconde par $\frac{v+v_0}{2}$, la troisième par $\frac{w+w_0}{2}$, et qu'on les ajoute, il viendra, en se rappelant d'ailleurs que l'on a $\mathrm{V}^2=u^2+v^2+w^2$ et $\mathrm{V}_0^2=u_0^2+v_0^2+w_0^2$,

$$\frac{m\,\mathrm{V}^2-m\,\mathrm{V}_0^2}{2}=\frac{u+u_0}{2}\int_0^t \mathrm{X}\,dt+\frac{v+v_0}{2}\int_0^t \mathrm{Y}\,dt+\frac{w+w_0}{2}\int_0^t \mathrm{Z}\,dt.$$

Nous retrouvons, dans le premier membre de cette équation, comme dans les équations des forces vives données plus haut, la demi-variation de la force vive, et, quant au second membre, il représente le travail de la force si elle agissait sur un point animé d'une vitesse constante dont les composantes seraient $\frac{u+u_0}{2}$, $\frac{v+v_0}{2}$, $\frac{w+w_0}{2}$; le travail élémentaire de la force aurait, en effet, pour expression, dans ce cas,

$$\mathrm{X}\frac{u+u_0}{2}dt+\mathrm{Y}\frac{v+v_0}{2}dt+\mathrm{Z}\frac{w+w_0}{2}dt,$$

et le travail intégral serait dès lors représenté par le second membre de l'équation précédente; cette équation s'appliquerait, d'ailleurs, tout aussi bien à un système quelconque qu'à un point, à la seule condition de l'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\Sigma\,m\,\mathrm{V}^2-\Sigma\,m\,\mathrm{V}_0^2}{2}=\Sigma\left[\int_0^t \mathrm{X}\frac{u+u_0}{2}dt+\int_0^t \mathrm{Y}\frac{v+v_0}{2}dt+\int_0^t \mathrm{Z}\frac{w+w_0}{2}dt\right].$$

On déduit immédiatement de cette équation l'énoncé du théorème général sur le choc qui suit :

Le demi-accroissement de la force vive du système est égal à la somme des travaux que produiraient les percussions tant intérieures qu'extérieures, si chacun des points d'application de ces percussions conservait pendant la durée de leur action une vitesse constante égale à la demi-somme géométrique de ses vitesses initiale et finale.

M. Darboux fait remarquer que chaque fois que les pressions intérieures, qui, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, sont égales deux à deux et de signes contraires, ont lieu entre des points assujettis par la nature du système à demeurer à des distances constantes les uns des autres, les termes qui correspondent à ces percussions se détruisent dans l'équation précédente ; de sorte que, pour le cas des corps solides, l'énoncé indiqué ci-dessus se modifie ainsi qu'il suit :

Dans le choc des corps solides le demi-accroissement de la force vive est égal à la somme des travaux que produiraient les percussions extérieures, si leurs points d'application conservaient pendant toute la durée de leur action une vitesse constante égale à la demi-somme géométrique de leurs vitesses initiale ou finale.

Si l'on multiplie maintenant les trois équations des quantités de mouvement posées plus haut, la première par u, la seconde par v, et la troisième par w, et qu'on les ajoute, on arrive facilement à l'équation suivante :

$$\frac{m\,V^2 - m\,V_0^2}{2} = m\left[\frac{(u_0-u)^2+(v_0-v)^2+(w_0-w)^2}{2}\right] - \left[\int_0^t X\cdot u\,dt + \int_0^t Y\cdot v\,dt + \int_0^t Z\cdot w\,dt\right],$$

ou, pour un système quelconque,

$$\frac{\Sigma m\,V^2 - \Sigma m\,V_0^2}{2} = \Sigma m\left[\frac{(u_0-u)^2+(v_0-v)^2+(w_0-w)^2}{2}\right] - \Sigma\left[\int_0^t X\cdot u dt + \int_0^t Y\cdot v dt + \int_0^t Z\cdot w dt\right];$$

d'où l'on déduit l'énoncé d'un second théorème général sur le choc :

La demi-perte de force vive est égale à la demi-force vive due aux vitesses perdues, moins la somme des travaux que produiraient les percussions tant intérieures qu'extérieures si chacun de leurs points d'application prenait dès le début une vitesse constante égale à sa vitesse finale.

Et s'il s'agissait d'un corps solide, comme la somme des travaux des percussions intérieures est nulle, on aurait l'énoncé suivant :

Dans le choc des corps solides la demi-perte de force vive est égale à la demi-

force vive due aux vitesses perdues, moins la somme des travaux que produiraient les percussions extérieures si chacun de leurs points d'application prenait dès le début une vitesse constante égale à sa vitesse finale.

M. Darboux, après avoir établi les deux théorèmes que nous venons d'analyser, considère deux corps M et M′ se choquant en un point A. L'effet du choc peut se représenter, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, par deux percussions égales et contraires dirigées suivant la normale en A aux surfaces de contact, l'une $\int N\,dt$ appliquée au corps M, l'autre $-\int N\,dt$ appliquée au corps M′. Si l'on désigne par n_0, n les composantes suivant la normale en A des vitesses initiale et finale du point du corps M qui se trouve en A ; par n'_0, n' ces mêmes composantes pour le point du corps M′ qui se trouve en ce même point A, on arrivera, en partant du premier des théorèmes généraux établis plus haut, aux équations suivantes :

Pour le corps M :

$$\Sigma_M \frac{mV^2}{2} - \Sigma_M \frac{mV_0^2}{2} = \int_0^t N(n_0+n)\,dt,$$

Pour le corps M′ :

$$\Sigma_{M'} \frac{mV^2}{2} - \Sigma_{M'} \frac{mV_0^2}{2} = -\int_0^t N(n'_0+n')\,dt;$$

d'où, ajoutant ces deux équations pour avoir la variation totale de force vive du système,

$$\Sigma \frac{mV^2}{2} - \Sigma \frac{mV_0^2}{2} = \int_0^t N\,dt\,(n+n_0-n'-n'_0).$$

Si les corps sont parfaitement élastiques, la variation de force vive doit être nulle; d'où l'on déduit

$$n-n' = n'_0 - n_0,$$

ce qui indique que *la vitesse relative des points en contact doit changer de signe par suite du choc.*

Ce point établi, M. Darboux décompose le choc en deux périodes par la condition que les intégrales $\int N\,dt$ soient égales pour chacune de ces périodes. Les impulsions imprimées aux deux corps dans chaque période sont égales et agissent dans la même direction ; d'où résulte que la vitesse reste la même en grandeur et en direction pour chacun des deux corps, ce qui permet de déterminer les composantes normales des vitesses au point de contact à la fin

de la première période. Il suffit pour cela de remarquer que, si n_M représente cette composante pour le corps M, on aura, d'après la relation précédente,

$$n - n_M = n_M - n_0,$$

d'où

$$n_M = \frac{n + n_0}{2}.$$

Si $n_{M'}$ représente la composante normale de la vitesse pour le corps M', on aurait de même

$$n_{M'} = \frac{n' + n_0'}{2}.$$

L'équation relative aux changements de signe de la vitesse donnée plus haut peut, d'ailleurs, s'écrire comme il suit :

$$n + n_0 = n' + n_0',$$

relation qui, avec les deux précédentes, conduit à

$$n_M = n_{M'};$$

d'où résulte que les vitesses normales au contact deviennent égales quand l'intégrale $\int N\,dt$ a acquis la moitié de sa valeur définitive.

M. Darboux fait remarquer ensuite que, si le choc s'arrête précisément à ce moment-là, on est dans le cas des corps mous. Dans ces corps, la percussion est donc deux fois moindre que s'ils étaient élastiques, ce qui démontre la propriété sur laquelle s'appuyait l'ancienne théorie et confirme la démonstration de fait qu'en avait donnée M. Résal.

Il faut remarquer enfin que, dans le cas des corps mous, la vitesse au contact devenant la même pour les deux corps après la percussion, les travaux sont égaux et de signe contraire, ce qui transforme le dernier des théorèmes donnés plus haut dans le suivant :

Dans le choc des corps mous la perte de force vive est égale à la force vive due aux vitesses perdues.

Cet énoncé n'est autre que celui du théorème de Carnot.

Nous ferons remarquer maintenant que Navier était déjà arrivé, dans ses leçons à l'École polytechnique, à donner une analyse assez complète du choc des corps non élastiques, c'est-à-dire des corps tels que le choc se termine quand les percussions sont parvenues à leur maximum, et que les surfaces

des deux corps ne se déforment point à l'instant où le choc finit, mais peuvent simplement glisser les unes sur les autres.

Navier partait de l'équation (N) du numéro 38, qu'il écrivait comme il suit :

$$\Sigma m\left[\frac{du}{dt}\delta x+\frac{dv}{dt}\delta y+\frac{dw}{dt}\delta z\right]=\Sigma\left(X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z\right).$$

Si, dans le système auquel cette équation s'applique, il se produit un choc, il faut y introduire les travaux des efforts intérieurs produits par ce choc. Si l'on désigne par N la valeur de l'effort exercé, au bout du temps t, entre les deux corps du système que l'on a mis en contact, et par n la distance du point de contact à un point fixe pris sur la normale commune aux deux surfaces en ce point, l'équation précédente deviendra :

$$\Sigma m\left(\frac{du}{dt}\delta x+\frac{dv}{dt}\delta y+\frac{dw}{dt}\delta z\right)=\Sigma\left(X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z\right)+\Sigma N\,\delta n,$$

équation qui devra subsister pendant toute la durée du choc. Cette durée étant toujours très petite et les positions du système ne subissant, pendant cette durée, que des changements très petits, on peut, sans erreur sensible, supposer que les déplacements virtuels δx, δy, δz restent, pendant la durée du choc, indépendants du temps. En intégrant dans cette hypothèse l'équation précédente par rapport au temps, après en avoir multiplié les deux membres par dt, et si l'on désigne par u_0, v_0, w_0 les valeurs de u, v, w qui correspondent à l'instant où le choc commence, il viendra :

$$\Sigma m\left[(u-u_0)\,\delta x+(v-v_0)\,\delta y+(w-w_0)\,\delta z\right]=\Sigma\left(X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z\right)dt+\Sigma\int N\,\delta n\,dt.$$

Les forces X, Y, Z, qui représentent, dans cette équation, les actions continues exercées sur le système, ont généralement des valeurs très petites par rapport aux efforts N développés par le choc; de sorte que l'on peut négliger le premier terme du second membre de l'équation précédente, et c'est aussi à cette approximation qu'ont été faits les calculs de MM. Résal et Darboux; car ils ne se sont occupés l'un et l'autre que des seules forces de percussion, en prenant pour vitesse initiale la vitesse qu'avait le système au moment où le choc commençait. On voit donc que tout le monde est d'accord pour négliger le terme concernant l'action continue des forces extérieures; mais, d'un autre côté, on peut admettre que, dans le déplacement du système auquel correspondent les déplacements δx, δy, δz, les surfaces en contact ne se séparent point lorsqu'il s'agit de corps non élastiques. Les forces N donnent, dans ce cas,

des travaux égaux deux à deux et de signe contraire, de sorte que le second terme du deuxième membre de l'équation précédente s'annule aussi, et l'on a

$$\Sigma m\left[(u-u_0)\,\delta x+(v-v_0)\,\delta y+(w-w_0)\,\delta z\right]=0.$$

Dans les corps non élastiques on peut, puisqu'à la fin du choc les surfaces ne se séparent plus, prendre pour δx, δy, δz les déplacements réels $dx=udt$, $dy=vdt$, $dz=wdt$, ce qui transforme notre équation dans la suivante :

$$\Sigma m\left[u^2+v^2+w^2-(uu_0+vv_0+ww_0)\right]=0.$$

On a d'ailleurs identiquement

$$uu_0+vv_0+ww_0=\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+\frac{u_0^2+v_0^2+w_0^2}{2}-\left[\frac{(u_0-u)^2+(v_0-v)^2+(w_0-w)^2}{2}\right],$$

ce qui, si l'on se rappelle que l'on a

$$V^2=u^2+v^2+w^2,\qquad V_0^2=u_0^2+v_0^2+w_0^2,$$

transforme l'équation précédente ainsi qu'il suit :

$$\Sigma m V^2-\Sigma m V_0^2=\Sigma m\left[(u_0-u)^2+(v_0-v)^2+(w_0-w)^2\right],$$

équation qui conduit à l'énoncé du théorème de Carnot tel qu'il a été donné plus haut.

En ce qui concerne le choc entre corps élastiques, Navier faisait remarquer qu'il n'était plus permis de remplacer les déplacements virtuels δx, δy, δz par les déplacements réels dx, dy, dz, attendu que les surfaces des deux corps mis en contact par le choc se séparaient immédiatement après que ce choc s'était produit, les points de contact n'ayant plus les mêmes vitesses suivant la normale commune; mais les intégrales $\int N\,\delta n dt$ ont nécessairement des valeurs nulles, si on les suppose prises depuis le commencement jusqu'à la fin du choc, attendu que, le déplacement δn étant supposé indépendant du temps, ces intégrales se trouvent formées de deux parties égales et de signe contraire; d'où Navier concluait que *la somme des forces vives reprenait nécessairement, après le choc, la valeur qu'elle avait avant.* Il avait soin d'ajouter toutefois que cette proposition n'était vraie que pour le cas où les corps revenaient, après le choc, d'une manière complète à leur figure primitive.

Les calculs de MM. Résal et Darboux restent aussi dans ce cas abstrait, puisqu'ils ne tiennent pas compte des frottements dus au choc ou des défor-

mations qu'ils peuvent entraîner dans le système[1], et ce que je viens d'exposer me paraît établir suffisamment, ce que M. Résal a du reste parfaitement reconnu, que c'est à Navier qu'il faut faire remonter cette idée juste que *dans le choc direct la valeur de la force vive reste la même avant qu'après le choc.*

43. *Conservation du travail mécanique.* — Il me reste maintenant à indiquer un principe qui se rattache à celui des forces vives, et dont M. Lucas a donné la démonstration dans un mémoire sur divers théorèmes relatifs à l'équilibre et au mouvement des systèmes matériels, inséré au tome XXII des *Savants étrangers.*

M. Lucas appelle *travail morphique* le travail mécanique qu'il faudrait développer pour faire passer le système matériel d'une figure F_0 à une figure F au bout du temps t, ses points arrivant au repos dans leurs positions finales, et il donne au demi-accroissement des forces vives le nom de *travail impulsif.*

Pour faire passer le système de la figure F_0 à la figure F sur laquelle ses points arrivent avec des vitesses déterminées, il faudrait développer un certain travail morphique, plus un certain travail impulsif; cette somme représenterait un certain travail mécanique emmagasiné dans le système, qui, abandonné à lui-même, produirait un mouvement déterminé.

Si la figure du système au bout du temps t est F, et si T et T′ représentent le travail impulsif et le travail morphique, M. Lucas démontre, en se servant du principe des forces vives et en supposant, d'ailleurs, les forces extérieures de grandeur et de direction constantes[2], que, quelle que soit la valeur de t, on a toujours entre T et T′ la relation

$$T + T' = \text{constante},$$

[1] Les personnes qui voudraient aller plus loin dans cette étude du choc trouveront aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences, tome LXXVIII, page 1733, séance du 22 juin 1874, un travail très intéressant de M. Ledieu sur le choc, en tenant compte des vibrations atomiques des corps, et, dans le *Journal de Mathématiques* de 1867, un beau mémoire de M. de Saint-Venant sur le choc longitudinal des barres cylindriques ou coniques tronquées. M. de Saint-Venant a, de plus, donné aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences divers articles sur le choc et notamment dans le mémoire du 11 mai 1868, où il prouve que, à part un cas singulier, une fraction notable de la force vive est employée à faire vibrer les deux solides et perdue pour la translation ultérieure. Il résulte de là que le cas où il y a conservation des forces vives de translation avant et après le choc n'est qu'un cas idéal et applicable seulement à de très petits corps. Il est presque aussi idéal que celui des corps dits *corps mous.* La question concrète du choc, si l'on veut sortir de ces abstractions, reste donc une question fort complexe.

[2] Voir pour cette démonstration le mémoire de M. Lucas, au tome XXII du *Recueil des Savants étrangers.*

d'où l'on déduit cet énoncé que *le travail mécanique emmagasiné primitivement dans le système s'y retrouve intégralement à un instant quelconque.*

Il suit de là que, s'il y a gain de travail morphique, il y a, par cela même, perte équivalente de travail impulsif, et l'on peut dire que *le système gagne en déformation ce qu'il perd en vitesse, et inversement.*

Le principe de la conservation du travail mécanique ainsi établi avait été pressenti par plusieurs géomètres; M. Lucas est le premier qui en ait donné une démonstration générale.

44. *Dernières considérations sur les forces vives.* — Reprenons l'équation L' du numéro 38 et, pour simplifier, supposons que le système matériel se réduise à un seul point matériel; cette équation deviendra

$$(L_1) \qquad \frac{mV^2 - mV_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} F\cos(F\,ds)\,ds,$$

Si nous appelons p le poids du point matériel de masse m, on aura, d'après la première des équations (D) du numéro 25,

$$m = \frac{p}{g},$$

et, en substituant cette valeur de m dans le premier membre de l'équation précédente, celle-ci devient

$$p\frac{V^2}{2g} - p\frac{V_0^2}{2g} = \int_{s_0}^{s} F\cos(F\,ds)\,ds,$$

et, si l'on désigne par h et h_0 les hauteurs dues aux vitesses V et V_0 [1],

$$(L_2) \qquad p(h - h_0) = \int_{s_0}^{s} F\cos(F\,ds)\,ds.$$

$p(h - h_0)$ représente le travail du poids p élevé à la hauteur $h - h_0$ ou descendant de cette hauteur; de sorte qu'en réalité les forces vives qui entrent dans le premier membre de l'équation (L_1) sont exprimées en kilogrammètres, comme le travail de la force qui entre dans le second membre de cette équation.

La nouvelle expression que nous venons de donner de la force vive a

[1] On verra au numéro 49 comment on est conduit à cette expression *hauteur due à la vitesse;* il suffit ici, pour l'admettre, de faire remarquer que $\frac{V^2}{2g}$ représente une hauteur que l'on peut déterminer en posant $V^2 = 2gh$.

conduit, en Angleterre et en Allemagne, à remplacer le mot de *force vive* par celui d'*énergie actuelle*, et le travail total de la force exprimé par le second membre de l'équation (L_2) prend le nom d'*énergie potentielle dépensée*.

L'équation (L_2) qui s'appliquerait à un système quelconque en affectant ses deux membres du signe Σ conduit au nouvel énoncé que voici du principe des forces vives :

L'accroissement d'énergie actuelle produit, dans un temps donné, par un effort non équilibré est égal à l'énergie potentielle dépensée pendant le même temps.

L'expression générale d'*énergie potentielle* comprend le travail total de la force, tant celui qu'elle développe pour faire équilibre à la force vive ou à *l'énergie actuelle* du système que le travail excédant qui peut s'emmagasiner dans le système, et c'est pour cela que, dans l'énoncé précédent, on emploie la dénomination d'*énergie potentielle dépensée*.

La somme de l'énergie actuelle et de l'énergie potentielle représente la capacité absolue d'un corps pour produire du travail, et si au travail effectué on ajoute cette *énergie totale*, leur somme sera une quantité constante égale à *l'énergie initiale* que possédait le corps avant de faire aucun travail. L'énergie potentielle est la provision de travail emmagasiné dans le système, comme, par exemple, dans un ressort tendu, un poids soulevé, un gaz comprimé; elle diminue à mesure que ce travail s'effectue ou se dégage, et c'est pour ne pas la confondre avec le *travail* même de chaque instant qu'on la désigne sous le nom d'*énergie potentielle* ou d'*énergie virtuelle dormante*. D. Bernoulli, Euler et d'autres géomètres avaient déjà considéré ces provisions d'énergie dans un corps en repos, et la question de la conservation du travail mécanique n'était pas dès lors une question absolument neuve, ainsi que je l'ai du reste indiqué dans le numéro précédent.

La considération des énergies tend aujourd'hui, en France, à se substituer à celle des forces vives, et c'est pour cela que j'ai cru devoir en parler ici; car, au vrai, ce n'est qu'une question de mots, et le fond des choses reste toujours le même. Je ne vois, d'ailleurs, en ce qui me concerne, aucune raison de modifier ainsi d'anciennes dénominations; elles rappellent les noms de ceux qui ont trouvé les principes auxquels elles s'appliquent et les époques auxquelles ils ont vécu. Quel avantage peut-il y avoir à leur substituer des dénominations nouvelles qui tendent à détruire ces précieux souvenirs?

Nous avons vu plus haut qu'une force pouvait être mesurée par l'accroissement de quantité de mouvement qu'elle produisait dans un temps donné; on pourrait tout aussi bien la mesurer par l'accroissement de force vive

qu'elle produirait pendant le parcours d'une distance donnée. L'équation L_1 donne en effet, par la différentiation,

$$m V dV = F \cos(F ds) ds,$$

d'où

$$m \frac{V dV}{ds} = F \cos(F ds);$$

mais, d'un autre côté, le théorème des accroissements des quantités de mouvement du numéro 36 donnerait

$$m dV = F(\cos F ds) dt;$$

d'où

$$m \frac{dV}{dt} = F \cos(F ds);$$

d'où, égalant ces deux expressions de $F \cos(F ds)$,

$$m \frac{V dV}{ds} = m \frac{dV}{dt}.$$

Cette équation montre que les deux modes d'évaluation d'une force non équilibrée que nous venons d'indiquer sont absolument identiques, et l'on voit ainsi s'élargir encore les idées relatives à la mesure des forces.

45. *Principe de la moindre action.* — Il ne me reste plus maintenant, pour achever l'étude philosophique que j'ai cru devoir faire ici du principe des forces vives, pour bien faire saisir toute la portée de ce grand principe, qu'à mentionner le principe de la moindre action, qui s'y rattache et le complète et qui, combiné avec lui, peut conduire à la solution d'un grand nombre de questions de mécanique. Voici en quoi consiste ce principe : ds étant l'élément de trajectoire parcouru dans le temps dt par un point de masse m, et V la vitesse de ce point au bout du temps t, supposons que l'intégrale $\int m V ds$ soit prise entre deux points fixes par lesquels doit passer le point matériel dans son mouvement. On aura pour le système entier une somme d'intégrales analogues, $\Sigma \int m v ds$. Or, quels que soient le système et les forces qui le sollicitent, les trajectoires décrites par les points qui le composent entre ces séries de points fixes sont toujours telles, que la valeur de l'intégrale $\Sigma \int m v ds$ est un maximum ou un minimum, c'est-à-dire qu'elle est plus grande ou plus petite que pour les autres trajectoires commençant et finissant aux mêmes points, et qu'on pourrait faire décrire aux points du système si l'on joignait de nouvelles liaisons quelconques à celles qui existent déjà : il faut admettre,

toutefois, que la fonction $\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$ soit la différentielle exacte d'une fonction de x, y, z, c'est-à-dire qu'il y ait un potentiel. On démontre, en effet, que, dans ces conditions, on a toujours

$$\delta\,\Sigma\int m v\,ds = 0,$$

δ indiquant les variations éprouvées pour de petits changements quelconques.

Cette relation, en y substituant pour V sa valeur $\frac{ds}{dt}$, devient

$$\delta\,\Sigma\int m V^2\,dt = 0;$$

d'où l'on déduit cet énoncé du principe de la moindre action que *l'intégrale de la force vive, prise par rapport au temps entre deux positions données du système en mouvement, est un minimum ou un maximum.*

On me pardonnera sans doute d'être entré dans d'aussi longs développements sur le principe des forces vives, mais il est sans contredit le plus important et le plus fécond de la mécanique, et j'ai cru devoir le mettre dans toute sa lumière, pour le bien inculquer dans l'esprit de mes lecteurs et les mettre à même d'en faire application en connaissance de cause.

Art. 3. — Application des principes de l'article précédent aux cas de mouvement des corps solides qui peuvent trouver ultérieurement leurs analogies ou leur application dans l'hydrodynamique.

46. *Du mouvement uniforme.* — Supposons d'abord le système entièrement libre dans l'espace, et reprenons ici les équations (A_2) et (B_2) convenant à ce cas, et qui ont été établies au numéro 33 :

$$(A_2)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X,\\ \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma Y,\\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} &= \Sigma Z;\end{aligned}\right.$$

$$(B_2)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma m\left(\frac{d^2z}{dt^2}y-\frac{d^2y}{dt^2}z\right) &= \Sigma\left(Zy-Yz\right),\\ \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}z-\frac{d^2z}{dt^2}x\right) &= \Sigma\left(Xz-Zx\right),\\ \Sigma m\left(\frac{d^2y}{dt^2}x-\frac{d^2x}{dt^2}y\right) &= \Sigma\left(Yx-Xy\right).\end{aligned}\right.$$

Si le mouvement est uniforme et de direction constante, les trois composantes de la vitesse sont constantes elles-mêmes, et l'on a dès lors :

$$\frac{du}{dt}=0 \text{ ou } \frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

$$\frac{dv}{dt}=0 \text{ ou } \frac{d^2y}{dt^2}=0,$$

$$\frac{dw}{dt}=0 \text{ ou } \frac{d^2z}{dt^2}=0,$$

conditions qui réduisent les équations (A_2) et (B_2) aux suivantes :

$$\Sigma X=0,$$

$$\Sigma Y=0,$$

$$\Sigma Z=0;$$

$$\Sigma(Zy-Yz)=0,$$

$$\Sigma(Xz-Zx)=0,$$

$$\Sigma(Yx-Xy)=0,$$

et ces équations ne sont autre chose que les conditions d'équilibre des forces appliquées au système, données au numéro 12. Il suit de là que, si le système est en mouvement uniforme, les forces qui le sollicitent sont nécessairement en équilibre. Elles peuvent d'ailleurs être nulles, car les équations (A) et (B) sont satisfaites aussi par le système de valeurs $X=0$, $Y=0$, $Z=0$. Inversement, si les forces appliquées à un système en mouvement se font équilibre ou sont nulles, ce mouvement sera nécessairement uniforme, et sa vitesse égale à la vitesse initiale.

Le mouvement uniforme entraîne d'ailleurs la condition de la direction rectiligne. En effet, la vitesse étant constante, on a nécessairement :

$$\frac{dx}{dt}=a,$$

$$\frac{dy}{dt}=b,$$

$$\frac{dz}{dt}=c,$$

a, b, c étant des constantes.

On déduit de ces trois équations les trois suivantes :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a},$$
$$\frac{dz}{dx}=\frac{c}{a},$$
$$\frac{dz}{dy}=\frac{c}{b},$$

qui indiquent que les projections d'une quelconque des trajectoires sur les trois plans coordonnés sont des lignes droites, et qu'il en est par conséquent de même de la trajectoire elle-même.

Les diverses propriétés du mouvement uniforme que nous venons de déduire des équations générales du mouvement peuvent, du reste, s'établir directement, si l'on remarque que toute force peut se décomposer en deux : l'une normale, l'autre tangente à la trajectoire. L'équilibre des composantes normales entraîne nécessairement l'unité de direction, et celui des composantes tangentielles, l'uniformité de vitesse.

Des équations

$$\frac{dx}{dt}=a,$$
$$\frac{dy}{dt}=b,$$
$$\frac{dz}{dt}=c,$$

on tirerait, s étant l'espace parcouru au bout du temps

$$V=\frac{ds}{dt}=A,$$

en posant

$$A=\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

d'où, par l'intégration,

$$s=At+\text{const.}$$

et, si l'on détermine la constante de manière que $s=0$ pour $t=0$, on aura

$$s=At.$$

L'espace parcouru est donc proportionnel au temps, et c'est là le caractère du mouvement uniforme.

La ligne droite s fait, avec les axes des x, y, z, des angles dont les cosinus ont pour valeurs

$$\frac{a}{A},\qquad \frac{b}{A},\qquad \frac{c}{A}.$$

Il faut bien insister, d'ailleurs, sur ce point que le système est libre, car ce n'est qu'à cette condition que le mouvement uniforme est nécessairement rectiligne.

Supposons, par exemple, qu'au lieu d'être libre, le système soit assujetti à tourner autour d'un point fixe, ou, pour simplifier, qu'il s'agisse d'un point matériel tournant, dans un plan donné, autour d'un point fixe, en restant à une distance donnée de ce point. Le mobile est, en un mot, en mouvement sur la circonférence d'un cercle. Pour que le mouvement soit uniforme sur cette courbe, il suffit que le mobile y parcoure des espaces proportionnels aux temps ou que sa vitesse soit constante. Or, si l'on désigne par a la vitesse angulaire, c'est-à-dire la vitesse d'un point du rayon vecteur situé à la distance du centre, égale à l'unité, la vitesse V du mobile aura pour valeur, R étant le rayon du cercle,

$$V = aR.$$

V sera donc constant, à la seule condition que a le soit. On a d'ailleurs, si θ représente l'angle du rayon vecteur avec un diamètre ducercle pris pour axe fixe,

$$a = \frac{d\theta}{dt},$$

de sorte que le mouvement sera uniforme dès que $\frac{d\theta}{dt}$ sera constant.

Le mouvement étant uniforme ici, quoique curviligne, cela tient à l'existence du point fixe, et la corrélation établie plus haut entre l'uniformité du mouvement et sa direction rectiligne n'existe absolument que pour les systèmes entièrement libres.

47. *Du mouvement uniformément varié.* — Dans le mouvement qui est uniformément varié en projection sur les trois axes des coordonnées, c'est l'accélération suivant chaque axe qui est constante, et ce mouvement est dès lors défini par les relations :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a',$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = b',$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c',$$

a', b', c' étant des constantes.

En se rappelant que l'on a

$$u=\frac{dx}{dt},\qquad v=\frac{dy}{dt},\qquad w=\frac{dz}{dt},$$

en intégrant et en déterminant les constantes de manière que l'on ait $u=0$, $v=0$, $w=0$ pour $t=0$, on déduit, des équations précédentes,

$$u=a't,$$
$$v=b't,$$
$$w=c't;$$

d'où

$$V=\frac{ds}{dt}=A't,$$

en posant

$$A'=\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}.$$

La vitesse est donc proportionnelle au temps.

La dernière des relations précédentes donne

$$ds=A't\,dt.$$

En intégrant et en déterminant la constante de manière que $s=0$ pour $t=0$, on en déduit

$$s=\frac{A't^2}{2}.$$

On voit que la loi des espaces parcourus par rapport au temps est ici *parabolique*, tandis que pour le mouvement uniforme elle est *linéaire*, l'espace parcouru y étant proportionnel au temps, comme on l'a vu au numéro précédent.

Les équations A_2 du numéro 33 deviennent ici, eu égard à ce qui vient d'être dit :

$$\Sigma ma'=\Sigma X,$$
$$\Sigma mb'=\Sigma Y,$$
$$\Sigma mc'=\Sigma Z;$$

d'où

$$\frac{\Sigma X}{\Sigma m}=\Sigma a',$$
$$\frac{\Sigma Y}{\Sigma m}=\Sigma b',$$
$$\frac{\Sigma Z}{\Sigma m}=\Sigma c'.$$

$\frac{X}{m}$, $\frac{Y}{m}$, $\frac{Z}{m}$ sont les composantes de la force rapportées à l'unité de masse ou les composantes de l'accélération. Il suit de là que, si un mouvement se définissait par la loi de la proportionnalité des composantes de la vitesse au temps, ce mouvement serait nécessairement un mouvement uniformément accéléré, puisque les composantes de l'accélération et, par conséquent, cette accélération elle-même seraient alors constantes.

Il nous reste maintenant à voir quelle est la forme de trajectoire propre au mouvement accéléré. On déduira facilement, des équations écrites ci-dessus,

$$\frac{dx}{dt} = a't,$$

$$\frac{dy}{dt} = b't,$$

$$\frac{dz}{dt} = c't;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b'}{a'},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c'}{a'},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{c'}{b'}.$$

Les projections de la trajectoire sur les trois plans coordonnés seront donc des lignes droites, et celle-ci serait dès lors, comme pour le mouvement uniforme, une ligne droite; mais il faut remarquer que, pour arriver à la loi du mouvement due à la force seule, nous avons dû supposer dans ce qui précède la vitesse initiale nulle. S'il en était autrement, le mouvement ne serait plus nécessairement rectiligne, tandis que, dans le mouvement uniforme, la trajectoire est toujours rectiligne, que la vitesse initiale soit nulle ou non, étant entendu qu'il ne s'agit que d'un corps libre dans l'espace.

48. *Loi de la chute des corps pesants.* — Nous pouvons, au point où nous sommes arrivés, déterminer maintenant les lois de la chute des corps pesants ou des systèmes uniquement soumis à l'action de la pesanteur. La loi théorique doit être établie abstraction faite de la résistance des milieux dans lesquels peuvent se mouvoir les corps, et le premier cas à traiter est dès lors celui de la chute des corps dans le vide; nous verrons ensuite quelles modifications les résistances des milieux peuvent apporter aux lois établies pour ce cas abstrait.

49. *Chute des corps dans le vide.* — La pesanteur, étant une force à accélération constante, doit nécessairement produire un mouvement uniformément varié. Nous considérerons la masse du corps comme concentrée sur son centre de gravité, ce qui nous ramène au cas très simple d'un point matériel sollicité par une force égale au poids du corps et dirigé suivant la verticale du lieu.

Si nous prenons cette verticale pour axe des z, les z positifs étant comptés de haut en bas, et si nous désignons par P et m le poids et la masse du corps, nous aurons

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = P = mg,$$

et les équations (A_2) et (B_2) du numéro 33 se réduisent à la seule équation

$$(1) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = g;$$

mais ici on a $V = \frac{dz}{dt}$, et l'équation précédente devient dès lors

$$dV = g\,dt,$$

d'où, intégrant,

$$V = gt + \text{const.}$$

Si l'on suppose d'abord que le corps parte du repos, la vitesse initiale correspondant à $t = 0$ est nulle, et l'on a

$$(2) \qquad V = gt;$$

mais on a

$$dz = V\,dt;$$

d'où, par l'intégration,

$$z = \frac{gt^2}{2} + \text{const.}$$

et, si l'on suppose que l'on ait $z = 0$ pour $t = 0$, c'est-à-dire que le corps parte de l'origine des z pour se mettre en mouvement, cette équation se réduit à

$$z = \frac{gt^2}{2}.$$

La loi de la chute des corps graves dans le vide est donc représentée par le système d'équations

$$(3) \qquad \begin{cases} V = gt, \\ z = \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Si l'on élimine t entre ces deux équations, on en déduit

$$\frac{V^2}{2g} = z; \tag{4}$$

d'où

$$V = \sqrt{2gz}. \tag{5}$$

La quantité $\sqrt{2gz}$ est la *vitesse due à la hauteur* z, et la quantité $\frac{V^2}{2g}$ la *hauteur due à la vitesse* V. Il faut se familiariser avec ces expressions, qui reviennent souvent en mécanique et que nous avions déjà employées au numéro 44. Elles sont maintenant complètement expliquées.

Si, au lieu de supposer, comme nous l'avons fait, le mobile parti de l'origine o des z sans vitesse initiale, on lui supposait une vitesse initiale V_0 dirigée suivant la verticale ou l'axe des z, on arriverait facilement, et par des déductions analogues à celles qui viennent d'être données, aux relations

$$\left\{\begin{aligned} V &= V_0 + gt, \\ z &= V_0 t + \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

d'où l'on déduirait, par l'élimination de t,

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z, \tag{7}$$

ce qui conduit à cette remarquable conséquence que *la différence des hauteurs dues aux vitesses à deux instants différents du mouvement est égale à la hauteur de laquelle le corps est descendu entre ces deux instants.*

Si l'on considérait, d'ailleurs, le mouvement uniforme que prendrait le corps, abstraction faite de l'action de la pesanteur et en vertu de sa seule vitesse initiale, on aurait :

$$\left\{\begin{aligned} V &= V_0, \\ z &= V_0 t. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Si l'on compare maintenant le système des équations (6) aux systèmes (8) et (3), on voit qu'il s'en déduit en ajoutant leurs seconds membres. Si donc le corps est en mouvement uniforme lorsqu'il part de l'origine des z, la vitesse constante de ce mouvement se conservera intégralement dans la vitesse du mouvement uniformément accéléré, qui s'augmentera du terme $\frac{gt^2}{2}$, propre à ce mouvement.

Au lieu de partir, comme nous l'avons fait, des équations générales du mouvement (A_2) et (B_2), on pourrait partir de l'un quelconque des principes généraux établis plus haut, de celui des quantités de mouvement ou de celui des forces vives. Commençons par appliquer ce dernier. L'équation des forces vives à appliquer ici serait l'équation (L'') du numéro 38,

$$\frac{mV^2 - mV_0^2}{2} = R(r - r_0).$$

Mais on a

$$R = P = mg, \qquad r - r_0 = z,$$

puisque l'on suppose que le corps part de l'origine des z; d'où l'on déduit, en substituant ces valeurs dans l'équation précédente,

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (7) trouvée plus haut.

En différentiant cette équation par rapport à t, on a

$$\frac{VdV}{dt} = g\frac{dz}{dt};$$

d'où, puisque l'on a

$$V = \frac{dz}{dt},$$

on déduit

$$\frac{dV}{dt} = g;$$

d'où, par l'intégration,

$$V = V_0 + gt,$$

ou bien

$$\frac{dz}{dt} = V_0 + gt;$$

d'où, par l'intégration,

$$z = V_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

On a trouvé tout à l'heure

$$V = V_0 + gt,$$

et ces deux équations reproduisent bien les équations (6).

Si l'on voulait appliquer le principe des quantités de mouvement du numéro 36, il suffirait de remarquer que l'impulsion de la force serait ici

$$\int_0^t mg\,dt = mgt,$$

et l'on aurait dès lors, en appliquant ce principe,

$$m(V-V_0)=mgt,$$

d'où

$$V=V_0+gt,$$

ou

$$\frac{dz}{dt}=V_0+gt;$$

d'où l'on tirerait par l'intégration

$$z=V_0t+\frac{gt^2}{2},$$

et l'on retombe encore ainsi sur les équations (6).

Revenons maintenant à ces équations (6), qui expriment les lois de la chute des corps pesants. Nous avons supposé, pour les établir, que la vitesse initiale était dirigée de haut en bas dans la direction du mouvement qui avait lieu suivant l'axe des z. Si le corps était lancé de bas en haut suivant cette même verticale, au lieu de l'être de haut en bas, il faudrait changer le signe de V_0 et l'on aurait :

$$(6\ bis)\qquad \begin{cases} V=-V_0+gt, \\ z=-V_0t+\frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

La première de ces équations montre que la valeur de V va en diminuant et devient nulle pour une valeur de temps égale à $\frac{V_0}{g}$, et la seconde indique que l'espace parcouru au bout de ce temps serait

$$z=-\frac{V_0^2}{2g},$$

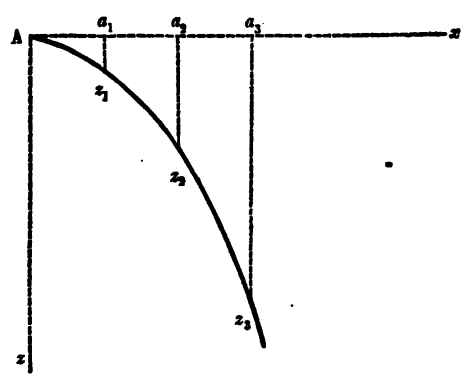
c'est-à-dire la hauteur due à la vitesse V_0 prise en signe contraire. Le corps partant de l'origine des z, avec cette vitesse initiale V_0 dirigée de bas en haut, monterait dès lors avec une vitesse V, décroissante jusqu'à une hauteur égale à celle dont il eût fallu qu'il descendît pour acquérir la vitesse V_0. A partir de cette hauteur, pour laquelle sa vitesse V devient nulle, le corps redescendrait et prendrait le mouvement uniformément accéléré analysé plus haut pour une vitesse initiale nulle, et il suivrait les lois indiquées par les équations (3). Il est facile de voir d'ailleurs que, si, après un temps quelconque t_0, le mouvement uniformément accéléré était devenu uniforme, le corps par-

courrait ensuite, après ce temps, un espace double de celui qu'il avait déjà parcouru, car $\frac{gt_0^2}{2}$ serait l'espace parcouru dans le mouvement uniformément accéléré, et la vitesse correspondante serait gt_0, et, si le mouvement devenait uniforme, cette vitesse gt_0 se conserverait, et l'espace parcouru serait gt_0^2, double de l'espace $\frac{gt_0^2}{2}$ parcouru dans le mouvement uniformément accéléré au bout du même temps.

Les lois qui viennent d'être établies ont été vérifiées par l'expérience, et l'appareil le plus exact qui ait été employé pour cela est celui du général Morin. On sait que dans cet appareil, décrit dans tous les cours de physique, le poids mobile est guidé verticalement et porte un crayon qui, à mesure que le mobile descend par son poids, trace sur une feuille de papier enroulée sur un cylindre circulaire à axe vertical, qu'on anime d'un mouvement de rotation uniforme, une courbe qui, après qu'on a développé la feuille de papier sur un plan, est reconnue pour être une parabole.

Si l'on prend le développement Ax (fig. 9) de la circonférence supérieure du cylindre, le point A étant le premier de ceux qui sont marqués sur le papier enroulé sur le cylindre lorsque le mobile se met en mouvement, et que par les points a_1, a_2, a_3, etc., divisant en parties égales la droite Ax, on mène des parallèles a_1z_1, a_2z_2, a_3z_3, etc., à la verticale Az qui vont rencontrer la courbe tracée par le mobile en z_1, z_2, z_3, etc., on trouve, en prenant ces ordonnées au compas, sur le papier déroulé, que, pour l'abscisse ou intervalle de temps $Aa_2 = 2Aa_1$, l'ordonnée a_2z_2, qui représente la hauteur dont le mobile est descendu pendant ce temps, est quadruple de l'ordonnée a_1z_1 correspondant à un temps Aa_1, moitié du temps $Aa_2 = 2Aa_1$; on trouverait de même que l'ordonnée a_3z_3 correspondant à l'abscisse $Aa_3 = 3Aa_1$ est égale à neuf fois l'ordonnée a_1z_1 correspondant au temps Aa_1, et ainsi de suite, ce qui indique que la courbe est une parabole dont Az est l'axe, et dont l'équation est dès lors de la forme

Fig. 9.



$$t^2 = 2pz;$$

d'où l'on déduirait

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{p}t$$

ou

$$V = \frac{1}{p} t, \tag{9}$$

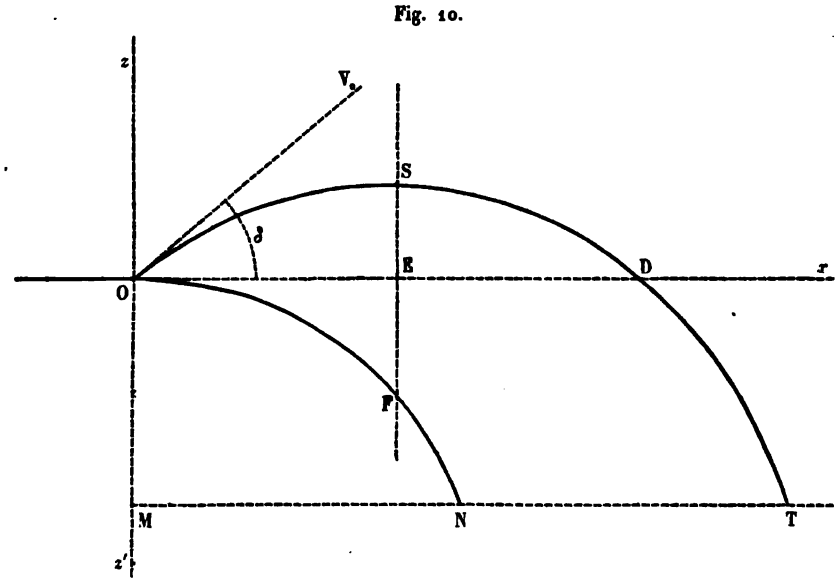
équation qui devient identique avec la première des équations (3) en posant $p = \frac{1}{g}$.

Il faut faire remarquer, d'ailleurs, que, dans l'appareil du général Morin, comme dans celui d'Atwood, les corps pesants ne tombent que de très faibles hauteurs, et qu'ils ne prennent, dès lors, que des vitesses assez faibles pour que la résistance de l'air n'exerce sur elles aucune action perturbatrice appréciable, et c'est ce qui explique comment ces appareils peuvent reproduire, pour des corps tombant à l'air, les lois que leur chute suivrait dans le vide, c'est-à-dire dans un milieu à résistance nulle. Si la hauteur de ces appareils, au lieu d'être de $1^m,20$ à $1^m,50$, comme elle l'est réellement, était seulement de 20 à 30 mètres, la résistance de l'air altérerait déjà la loi observée.

50. *Mouvement d'un corps pesant dans le vide lorsque la direction de la vitesse initiale n'est plus verticale.* — Si, au lieu d'être verticale, comme on l'a admis dans le numéro 49, la direction de la vitesse initiale avait une inclinaison quelconque, les lois du mouvement se modifieraient complètement.

Supposons (fig. 10) le centre de gravité de notre point matériel mobile

Fig. 10.



placé au point O au moment où se produit la vitesse initiale V_0, dont la direction fait un angle δ avec l'horizontale Ox passant par le point O pris pour

origine des coordonnées, le plan des zx sera le plan vertical passant par le point O et contenant la direction de la vitesse V_0 et dans lequel aura lieu le mouvement du corps. Nous compterons les x sur l'axe Ox et les z sur la verticale Oz passant par l'origine O; les z positifs sont d'ailleurs comptés de bas en haut ou de O vers z.

Le mouvement ayant lieu dans le plan des zx, il faut d'abord, dans les équations A_2 et B_2 du numéro 33, faire $y=0$ et de plus $Y=0$, $X=0$, ce qui (en changeant le signe des z) réduit ces équations aux deux suivantes :

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}=-g. \end{cases}$$

En intégrant ces équations et en désignant par u et w les composantes $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ de la vitesse V suivant les axes des x et des z et déterminant les constantes de manière que l'on ait $u=u_0$, $w=w_0$ pour $t=0$, u_0 et w_0 étant les composantes de la vitesse initiale V_0, on aura :

$$\frac{dx}{dt}=u_0,$$

$$\frac{dz}{dt}=w_0-gt;$$

mais on a

$$u_0=V_0\cos\delta,$$

$$w_0=V_0\sin\delta,$$

d'où

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=V_0\cos\delta, \\ \dfrac{dz}{dt}=V_0\sin\delta-gt. \end{cases}$$

On obtiendrait la vitesse V sur la trajectoire en se rappelant qu'on aurait

$$V=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

ou, substituant les valeurs (11) et $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$:

$$V=\sqrt{V_0^2-2g\left[t\cdot V_0\sin\delta-\frac{gt^2}{2}\right]}.$$

En intégrant les deux équations (11) et en déterminant les constantes de manière que l'on ait $x=0$, $z=0$ pour $t=0$, on a :

$$(12)\qquad \begin{cases} x = t\cdot V_0 \cos\delta, \\ z = t\cdot V_0 \sin\delta - g\frac{t^2}{2}, \end{cases}$$

et, en éliminant t entre ces deux équations, on arrive à l'équation suivante en x, z, qui est celle de la trajectoire :

$$(13)\qquad z = x \operatorname{tang}\delta - \frac{g x^2}{2V_0^2 \cos^2\delta}.$$

L'expression de la vitesse V trouvée plus haut peut maintenant, en vertu de la deuxième des équations (12), se mettre sous la forme :

$$V = \sqrt{V_0^2 - 2gz},$$

d'où l'on tirerait

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = -z,$$

ce qui reproduit l'expression (7) du numéro 49, au signe de z près, qui était compté de haut en bas et qui l'est ici de bas en haut. La différence des hauteurs dues aux vitesses est donc égale à la différence de niveau des deux points de la trajectoire que l'on compare. Cette équation n'est, d'ailleurs, autre chose que celle des forces vives, et l'on voit que la variation de la force vive ne dépend absolument que de la hauteur verticale franchie, et nullement de la forme de la courbe.

La trajectoire est, comme on le voit par son équation (13), une parabole. Pour avoir le point de rencontre D (fig. 11) de la courbe avec l'axe des x, il suffit de faire dans cette équation $z=0$ et d'en tirer la valeur correspondante de x, qui est

$$(14)\qquad x = \frac{V_0^2 \sin 2\delta}{g}.$$

Le sommet S de la courbe s'obtiendra en exprimant que z est un maximum. Or la condition $\frac{dz}{dx}=0$, qui convient à ce cas, donne, par la différentiation de l'équation (13),

$$(15)\qquad x = \frac{V_0^2 \sin 2\delta}{2g}.$$

Cette abscisse est la moitié de la précédente, de sorte que le sommet se

trouve sur la verticale menée du point E, milieu de OD. La valeur (15) de x, substituée dans l'équation (13) de la courbe, donne

$$z = \frac{V_0 \sin^2 \delta}{2g}, \tag{16}$$

ce qui fixera la hauteur SE du sommet au-dessus de l'axe des x.

Remarquons maintenant que, s'il s'agissait de déterminer la valeur de la vitesse initiale ou de son angle de manière à assurer une amplitude donnée du jet, il suffirait, dans l'équation (14), de supposer x donné et l'on en déduirait :

$$V_0 = \sqrt{\frac{gx}{\sin 2\delta}}, \tag{17}$$

$$\sin 2\delta = \frac{gx}{V_0^2}. \tag{18}$$

L'équation (17) déterminerait la vitesse initiale V_0 qu'il faudrait produire pour que, lancé sous l'angle δ, le mobile atteignît la distance x, et l'équation (18) donnerait l'angle sous lequel il faudrait lancer le mobile avec une vitesse initiale donnée V_0 pour qu'il pût atteindre la distance x.

Ces deux équations résolvaient autrefois, à une première approximation, le problème du tir des projectiles ronds par les mortiers, pour lesquels les vitesses initiales ne dépassaient pas 170 mètres. La résistance de l'air pouvait encore, sans faire d'erreur par trop considérable, se négliger; elles ne s'appliqueraient plus du tout au tir actuel des projectiles oblongs par les canons rayés, pour lesquels la vitesse initiale va jusqu'à 450 mètres; mais elles s'appliquent toujours aux jets d'eau, que nous aurons à traiter en détail dans l'hydraulique.

Si la direction de la vitesse initiale est horizontale, ce qui arriverait pour une veine fluide sortant sous pression d'un réservoir par un orifice dont le plan serait vertical, il faudrait, dans les équations qui précèdent, faire $\delta = 0$, et l'équation (13) de la trajectoire deviendrait

$$z = -\frac{gx^2}{2V_0^2},$$

ou, si l'on compte maintenant les z de haut en bas,

$$z = \frac{gx^2}{2V_0^2}.$$

C'est l'équation d'une parabole ON (fig. 10) ayant son sommet à l'origine O et dont l'axe est l'axe des z.

Si la vitesse initiale était dirigée suivant la verticale, il faudrait faire $\delta = 90°$, et les équations (12) se réduiraient à :

$$x = 0,$$

$$z = V_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Cette dernière équation n'est autre, comme on devait s'y attendre, que la seconde des équations (6), trouvée au numéro 49, au signe près du second terme, ce qui tient à ce que dans le numéro 49 on a compté les z positifs de haut en bas, tandis qu'ici ils sont comptés de bas en haut. On aurait donc pu traiter tout d'abord le cas d'une direction quelconque de la vitesse initiale et en déduire ensuite, comme cas particulier, tout ce qui a été donné pour les lois de la chute des corps graves. J'ai préféré traiter d'abord directement de ces lois, qui ont une si haute importance, plutôt que de les déduire, comme cas particulier, de la loi du mouvement curviligne des projectiles dans le vide.

51. *Influence de la résistance des milieux sur les lois de la chute des corps pesants.* — La résistance d'un milieu va en augmentant avec la vitesse du corps qui s'y meut, et si, pour les corps pesants tombant de faibles hauteurs, cette résistance est négligeable, comme le prouvent les expériences de la machine d'Atwood et de l'appareil du général Morin, elle devient, au contraire, très considérable pour de grandes vitesses. On admettait autrefois, pour le tir des bouches à feu, que la résistance de l'air croissait comme le carrré de la vitesse du mobile. Pour les canons actuels, où l'on a des vitesses initiales de 450 mètres, on en est aujourd'hui à admettre que la résistance est proportionnelle à la troisième puissance de la vitesse, et de la forme AV^3, et encore faut-il, pour cela, admettre que le coefficient A soit variable pour que les formules que l'on emploie puissent s'accorder avec les résultats fournis par l'expérience du tir.

Il est visible, d'après cela, que l'on est encore très peu avancé sur cette question de la résistance des milieux, et c'est elle aussi qui constitue une des principales difficultés de l'hydraulique, attendu que les notions sur la résistance de l'eau ne sont guère plus positives que celles que l'on a sur celle de l'air. Toutefois, pour la chute des corps pesants dans l'eau, on admet encore aujourd'hui que la résistance augmente à très peu près comme le carré de la vitesse. Ce qu'on ignore peut-être encore plus, c'est la loi des frottements intérieurs que font naître les mouvements des nappes fluides.

Il suit de ce qui vient d'être dit que les ressourees de l'analyse, quelque grandes qu'elles soient, demeurent insuffisantes pour conduire à ces lois de la résistance des milieux, que nous ne pouvons jamais saisir que par un côté et dont l'ensemble nous échappe, et il y a, pour chaque milieu, un élément expérimental à déterminer, et sans le secours duquel l'analyse ne conduirait à aucun résultat pratique. Elle permet toutefois de se rendre compte de quelques détails de la question, et c'est ce que je vais essayer de montrer.

Si l'on désigne par ψ (V) la force due à la résistance du milieu, V désignant la vitesse du mobile, et si, supposant que le corps tombe en vertu de son propre poids, nous conservons les notations du numéro 49, il est facile d'établir l'équation du mouvement, qui sera

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=mg-\psi(\mathrm{V}),$$

ou

(19) $$\frac{d\mathrm{V}}{dt}=g-\frac{\psi(\mathrm{V})}{m};$$

d'où l'on tirerait

(20) $$dt=\frac{m\,d\mathrm{V}}{mg-\psi(\mathrm{V})},$$

équation qui, étant intégrée, donnerait V en fonction de t. Cette intégration n'est pas toujours possible, et l'on est le plus souvent obligé d'opérer par les procédés d'approximation sur l'équation différentielle elle-même; on peut toutefois tirer des équations (19) et (20) quelques conséquences générales qu'il est bon d'indiquer, attendu qu'elles fournissent au moins des jalons.

L'expression (19) montre que l'accélération $\frac{dv}{dt}$ se rapprocherait d'autant plus de la constante g que $\frac{\psi(\mathrm{V})}{m}$ serait plus petit. Si l'on se rappelle, d'ailleurs, les expressions données au numéro 25, et si ρ représente la densité du corps et W son volume, on a

$$m=\rho\,\mathrm{W},$$

et l'équation (19) devient

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{\psi(\mathrm{V})}{\rho\,\mathrm{W}}.$$

On voit, d'après cette équation, que, W restant constant, le terme $\frac{\psi(\mathrm{V})}{\rho\,\mathrm{W}}$ diminue à mesure que ρ augmente. L'accélération augmente donc avec la densité du corps, et c'est ce que l'expérience nous démontre tous les jours. Nous pouvons, en effet, vérifier, à chaque instant, qu'à volume égal ce sont les corps les plus lourds qui tombent le plus vite, et une balle de plomb que l'on aban-

donne à elle-même, à une certaine hauteur, atteindra le sol autrement vite qu'une balle de liège de même volume tombant de la même hauteur. Or c'est à la résistance seule de l'air que ce résultat peut être attribué, puisque l'expérience prouve, d'un autre côté, que dans le vide tous les corps tombent avec la même vitesse, quelle que soit leur densité. C'est Newton qui a découvert ces propriétés de la résistance de l'air que nous venons de déduire de l'équation du mouvement et que l'expérience vérifie.

Je ferai remarquer maintenant que, si dans l'équation (19) le terme $\frac{\psi(V)}{m}$ peut augmenter assez pour devenir égal à g, cette équation donne

$$\frac{dV}{dt} = 0,$$

ce qui indique que le mouvement devient uniforme. On a, à ce moment, $mg = \psi(V)$, c'est-à-dire qu'il y a équilibre entre le poids du corps et la résistance de l'air. Il résulte de là *qu'un corps pesant tombant dans l'air d'une hauteur suffisante finirait toujours par prendre un mouvement uniforme avant d'atteindre le sol.*

Telles sont les conséquences générales que l'on peut tirer de l'équation du mouvement, et pour en tirer de plus spéciales il faut traiter des cas particuliers. Je prendrai celui où la résistance du milieu est proportionnelle au carré de la vitesse, comme cela arrive à très peu près pour les corps pesants tombant dans l'eau.

52. *Cas où la résistance du milieu est proportionnelle au carré de la vitesse.* — On a, dans ce cas,

$$\psi(V) = AV^2,$$

A étant un nombre constant, et l'équation (20) devient

$$(20\ bis) \qquad dt = \frac{m\,dV}{mg - AV^2}.$$

L'intégrale de cette équation différentielle, en déterminant la constante par la condition qu'on ait $V = V_0$ pour $t = 0$, est

$$(21) \qquad t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{Ag}} \cdot \log\left[\frac{1 + V\sqrt{\frac{A}{mg}}}{1 - V\sqrt{\frac{A}{mg}}} \cdot \frac{1 - V_0\sqrt{\frac{A}{mg}}}{1 + V_0\sqrt{\frac{A}{mg}}}\right],$$

le signe log indiquant des logarithmes népériens.

Cette équation, si e désigne la base des logarithmes, conduit immédiatement à la valeur de V, qui est

$$(22)\qquad V=\sqrt{\frac{mg}{A}}\cdot\frac{\left(1+V_0\sqrt{\frac{A}{mg}}\right)e^{2t\sqrt{\frac{Ag}{m}}}-\left(1-V_0\sqrt{\frac{A}{mg}}\right)}{\left(1+V_0\sqrt{\frac{A}{mg}}\right)e^{2t\sqrt{\frac{Ag}{m}}}+\left(1-V_0\sqrt{\frac{A}{mg}}\right)}.$$

Remarquons maintenant qu'on a

$$dz=V\,dt,$$

et l'équation (20 *bis*) devient

$$(23)\qquad dz=\frac{mV\,dV}{mg-AV^2},$$

équation qui, étant intégrée, en déterminant la constante de manière que $V=V_0$ pour $t=0$, donne

$$(24)\qquad z=\frac{m}{2A}\log\frac{1-V_0^2\frac{A}{mg}}{1-V^2.\frac{A}{mg}},$$

d'où, substituant dans cette équation la valeur (22) de V,

$$(25)\quad z=\frac{m}{A}\left[\log\left[\left(1+V_0\sqrt{\frac{A}{mg}}\right)e^{t\sqrt{\frac{Ag}{m}}}+\left(1-V_0\sqrt{\frac{A}{mg}}\right)e^{-t\sqrt{\frac{Ag}{m}}}\right]-\log 2\right].$$

L'équation (22) montre qu'à mesure que t augmente, la valeur de V se rapproche du nombre constant $\sqrt{\frac{mg}{A}}$, et qu'elle atteindrait cette limite pour $t=\infty$; elle en diffère, d'ailleurs, d'autant moins, pour une valeur finie de t, que la masse m du corps est plus petite.

La condition

$$V=\sqrt{\frac{mg}{A}}$$

donne

$$AV^2=mg,$$

c'est-à-dire que la résistance est égale à la puissance ou que les forces se font équilibre, et dès lors le mouvement ne peut plus être qu'uniforme, d'après ce qui a été établi au numéro 46.

Si la vitesse initiale était nulle, les équations (22) et (25) deviendraient :

$$(22\ bis)\qquad V=\sqrt{\frac{mg}{A}}\cdot\frac{e^{2t\sqrt{\frac{Ag}{m}}}-1}{e^{2t\sqrt{\frac{Ag}{m}}}+1},$$

$$(25\ bis)\qquad z=\frac{m}{A}\left[\log\left(e^{2t\sqrt{\frac{Ag}{m}}}+1\right)+t\sqrt{\frac{Ag}{m}}-\log 2\right].$$

Si l'on compare ces deux équations aux équations (3) du numéro 49 qui leur correspondent pour la chute des corps dans le vide, et qui sont

$$V=gt,$$
$$z=\frac{gt^2}{2},$$

on voit quelles modifications importantes la résistance de l'air doit faire subir à ces lois si simples, en supposant même, comme on l'a fait dans ce qui vient d'être dit, que cette résistance soit proportionnelle seulement au carré de la vitesse. La vitesse, au lieu de croître indéfiniment avec le temps, ne peut plus croître que jusqu'à une certaine limite, à partir de laquelle elle devient constante, l'espace parcouru devenant alors proportionnel au temps, au lieu de rester proportionnel au carré du temps, comme cela arrive lorsque les corps tombent dans le vide.

Si, au lieu de supposer, comme le font les calculs précédents, que le corps soit lancé de haut en bas, on le supposait lancé de bas en haut, mais toujours suivant la verticale, la résistance du milieu agirait dans le même sens que la pesanteur, et si l'on compte maintenant les z de bas en haut, l'équation (20) du mouvement devient

$$(26)\qquad \frac{dV}{dt}=-(g+AV^2),$$

d'où

$$(27)\qquad dt=-\frac{m\,dV}{mg+AV^2},$$

d'où l'on déduit, en intégrant, la constante étant déterminée de manière que $V=V_0$ pour $t=0$,

$$(28)\qquad t=\sqrt{\frac{m}{Ag}}\left[\operatorname{arc\,tang} V_0\sqrt{\frac{A}{mg}}-\operatorname{arc\,tang} V\sqrt{\frac{A}{mg}}\right],$$

d'où

$$(29)\qquad V=\sqrt{\frac{mg}{A}}\tang\left[\operatorname{arc\,tang} V_0\sqrt{\frac{A}{mg}}-t\sqrt{\frac{Ag}{m}}\right].$$

Cette relation montre que V diminue à mesure que t augmente et s'annule pour la valeur

$$t = \sqrt{\frac{m}{Ag}} \operatorname{arc\,tang} V_0 \sqrt{\frac{A}{mg}}. \tag{30}$$

Pour avoir l'espace parcouru, il suffit de substituer, dans la relation

$$dz = V dt,$$

la valeur de dt tirée de l'équation (27), et l'on a

$$dz = -\frac{mV\,dV}{mg + AV^2}, \tag{31}$$

d'où, intégrant et déterminant la constante de manière que $V = V_0$ pour $t = 0$,

$$z = \frac{m}{2A} \log \frac{mg + AV_0^2}{mg + AV^2}. \tag{32}$$

Pour obtenir la hauteur z' à laquelle s'élèvera le corps, il suffit de faire $V = 0$ dans cette dernière équation, qui donne

$$z' = \frac{m}{2A} \log\left(1 + \frac{A}{mg} V_0^2\right). \tag{33}$$

En substituant dans l'équation (32) la valeur (29) de V, elle devient

$$z = \frac{m}{A} \log\left[\cos t \sqrt{\frac{Ag}{m}} + V_0 \sqrt{\frac{A}{mg}} \sin t \sqrt{\frac{Ag}{m}}\right]. \tag{34}$$

Il résulte de cette analyse que le corps lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse V_0 commencera à monter, sa vitesse allant en diminuant à mesure que le temps augmentera, pour s'annuler lorsque celui-ci aura atteint la valeur indiquée par l'expression (30); le corps atteindra alors la hauteur indiquée par l'expression (33), et il sera, dès ce moment, dans le cas d'un corps pesant partant sans vitesse initiale de ce point pour tomber suivant les lois indiquées par les formules (22 *bis*) et (25 *bis*).

Il faut remarquer que ces formules, ainsi que les formules (22) et (25), comparées aux formules (3) et (6), leurs analogues dans l'article 49, où l'on fait abstraction de la résistance du milieu, ne les reproduisent pas, du moins immédiatement, en y faisant $A = 0$, et elles se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Il faut dès lors recourir aux procédés connus de l'analyse pour les dégager de

cette indétermination. On peut employer pour cela ou la règle classique d'après laquelle on a limite $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ quand $f(x)$ et $\varphi(x)$ s'annulent à la fois, ou les développements en séries. J'applique ce dernier procédé et, pour A très petit, la formule (32) devient

$$z = \frac{1}{2}\frac{m}{A}\log\frac{1+\frac{AV_0^2}{mg}}{1+\frac{AV^2}{mg}} = \frac{1}{2}\frac{m}{A}\log\left[1+\frac{A}{mg}(V_0^2-V^2)\right],$$

d'où, en se servant de la formule connue,

$$\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \cdots\cdots$$

on déduit

$$z = \frac{V_0^2 - V^2}{2g},$$

ce qui reproduit déjà l'équation (7) du numéro 49.

La formule (34), en se rappelant les séries

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \cdots\cdots$$

$$\sin u = \frac{u}{1} - \frac{u^3}{2\cdot 3} + \cdots\cdots$$

devient

$$z = \frac{m}{A}\log\left[1 - t^2\frac{Ag}{2m} + V_0\sqrt{\frac{A}{mg}}\cdot t\sqrt{\frac{Ag}{m}}\right] = \frac{m}{A}\log\left[1+\frac{A}{m}\left(V_0 t - \frac{gt^2}{2}\right)\right],$$

d'où, par la formule connue

$$\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \cdots\cdots$$

il vient

$$z = \frac{m}{A}\cdot\frac{A}{m}\left(V_0 t - \frac{gt^2}{2}\right) = V_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Cette valeur de z reproduit celle que donne la seconde des équations (5) du numéro 49 en changeant le signe de z, puisqu'ici nous supposons le corps lancé de bas en haut et que ce sont les équations (6 *bis*) du numéro 49 qui sont alors applicables. Ces concordances sont d'ailleurs ici une vérification indirecte des intégrales données plus haut.

Si l'on recourait, du reste, à l'équation différentielle (27) en y faisant $A = 0$, elle deviendrait

$$dt = -\frac{dV}{g},$$

d'où

$$V = -gt + V_0,$$

d'où

$$z = V_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

comme ci-dessus.

53. *Mouvement d'un point matériel sur une courbe. — Forces centrifuge et centripète.* — La sujétion de suivre une courbe donnée entraîne, pour le mouvement du corps, de nouvelles conditions, qu'il faut faire connaître, et je supposerai d'abord que l'on fasse abstraction de la résistance due au frottement sur la courbe. Le mobile, ou point matériel en mouvement sur la courbe, est d'ailleurs sollicité par des forces quelconques dont R serait la résultante, et je désigne toujours par x, y, z les coordonnées rectangulaires du point où se trouve le mobile au bout du temps t; α, β, γ désignant les angles que fait la force R avec les axes des x, y, z; X, Y, Z, ses composantes suivant ces mêmes axes.

La force R peut se décomposer en deux : l'une T dirigée suivant la tangente à la courbe au point (x, y, z), l'autre N suivant la normale à cette courbe au même point. Si a désigne l'angle des directions de R et de T, on aura

$$T = R \cos a,$$

mais les cosinus des angles que fait la direction de R avec les axes sont $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et les cosinus des angles que la direction de T fait avec les mêmes axes sont :

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

et l'on a dès lors la relation

$$\cos a = \cos\alpha \frac{dx}{ds} + \cos\beta \frac{dy}{ds} + \cos\gamma \frac{dz}{ds},$$

et l'expression de T deviendra

$$T = R\left(\cos\alpha \frac{dx}{ds} + \cos\beta \frac{dy}{ds} + \cos\gamma \frac{dz}{ds}\right),$$

ou, en se rappelant que $X = R\cos\alpha$, $Y = R\cos\beta$, $Z = R\cos\gamma$,

$$T = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}. \tag{35}$$

Quant à la force N, ses composantes N_x, N_y, N_z suivant les trois axes seront :

$$\left\{\begin{aligned} N_x &= X - T\frac{dx}{ds}, \\ N_y &= Y - T\frac{dy}{ds}, \\ N_z &= Z - T\frac{dz}{ds}, \end{aligned}\right. \tag{36}$$

et l'on aurait

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}. \tag{36 bis}$$

Les valeurs de T et de N peuvent donc se déterminer dès que l'on connaît X, Y, Z.

Considérons maintenant la résistance que la courbe (supposée toujours infiniment polie) oppose au mouvement. La force qui la représente est nécessairement normale à la courbe et elle se compose de deux parties : l'une, qui détruit la force N; l'autre, qui provient de la force d'inertie du mobile, force en vertu de laquelle celui-ci tend à se jeter hors de la courbe, pour suivre, avec sa vitesse acquise, un mouvement rectiligne et uniforme. Il résulte de là que, la force N étant détruite par une partie de la résistance, le mouvement a réellement lieu en vertu de la force tangentielle T et de la seconde partie F_r inconnue de la résistance.

Les composantes de la vitesse $\frac{ds}{dt}$ du point matériel au bout du temps t sont :

$$\frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds}, \quad \frac{ds}{dt}\frac{dy}{ds}, \quad \frac{ds}{dt}\frac{dz}{ds}.$$

Les vitesses acquises suivant les axes pendant le temps dt ont pour expressions les dérivées des précédentes, qui sont :

$$\frac{d^2s}{dt}\frac{dx}{ds} + \frac{ds}{dt}d\left(\frac{dx}{ds}\right), \quad \frac{d^2s}{dt}\frac{dy}{ds} + \frac{ds}{dt}d\left(\frac{dy}{ds}\right), \quad \frac{d^2s}{dt}\frac{dz}{ds} + \frac{ds}{dt}d\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

et les accélérations ou vitesses acquises au bout du temps t dans l'unité de temps s'obtiennent en divisant ces expressions par dt. Si l'on désigne d'ailleurs

par λ, μ, ν les angles que fait la direction de la force F_c avec les axes, les équations (A_2) du numéro 33 deviennent ici :

$$(37)\qquad \begin{cases} m\left[\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{ds}+\frac{ds}{dt^2}d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right]=T\frac{dx}{ds}+F_c\cos\lambda, \\ m\left[\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dy}{ds}+\frac{ds}{dt^2}d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right]=T\frac{dy}{ds}+F_c\cos\mu, \\ m\left[\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dz}{ds}+\frac{ds}{dt^2}d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]=T\frac{dz}{ds}+F_c\cos\nu. \end{cases}$$

Mais, la direction de la force F_c étant normale à la courbe, on a entre les cosinus de ses angles avec les axes et ceux des angles de la tangente avec les mêmes axes, la relation

$$(38)\qquad \cos\lambda\frac{dx}{ds}+\cos\mu\frac{dy}{ds}+\cos\nu\frac{dz}{ds}=0.$$

Les quantités $d\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dz}{ds}\right)$ sont, d'ailleurs, proportionnelles aux expressions que donne le calcul différentiel pour les cosinus des angles que fait avec les axes la direction du rayon de courbure de la courbe, ce qui entraîne la relation suivante :

$$(38\ bis)\qquad \frac{dx}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{dz}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

Si l'on multiplie les trois équations (37) respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et qu'on les ajoute en tenant compte des équations (38) et (38 *bis*), on arrive à l'expression très simple

$$(39)\qquad T=m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Elle indique *que le mobile se meut en chaque point de la courbe comme il le ferait sur une trajectoire rectiligne, sous l'action d'une force égale à la composante tangentielle de la force qui le sollicite réellement.*

En ayant égard à la relation (39), les équations (37) deviennent :

$$(37\ bis)\qquad \begin{cases} m\frac{ds}{dt^2}d\left(\frac{dx}{ds}\right)=F_c\cos\lambda, \\ m\frac{ds}{dt^2}d\left(\frac{dy}{ds}\right)=F_c\cos\mu, \\ m\frac{ds}{dt^2}d\left(\frac{dz}{ds}\right)=F_c\cos\nu. \end{cases}$$

Si l'on élève chacune de ces trois équations au carré, qu'on ajoute les résultats, membre à membre, et que l'on se rappelle d'ailleurs que le calcul différentiel donne, pour le rayon de courbure r, l'expression suivante :

$$r = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2}},$$

on arrive à la relation, fort simple encore,

$$(39\ bis) \qquad F_c = \frac{m}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{mV^2}{r}.$$

On peut d'ailleurs arriver aux expressions (39 et 39 *bis*) sans passer par les calculs que je viens d'indiquer, au moyen des considérations suivantes. Le premier terme du premier membre des expressions (37) représente une force motrice (par unité de masse) égale à $\frac{d^2s}{dt^2}$ et ayant pour cosinus directeurs $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, c'est-à-dire dirigée suivant la tangente. Le second terme représente aussi une force motrice égale à $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{1}{r}$ et ayant pour cosinus directeurs $\frac{r}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $\frac{r}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $\frac{r}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right)$, c'est-à-dire dirigée vers le centre de courbure de la trajectoire dont r est le rayon de courbure. On voit donc immédiatement que l'on aura

$$(39) \qquad T = m\frac{d^2s}{dt^2},$$

et que F_c, dirigée forcément suivant la normale principale, aura pour expression

$$(39\ bis) \qquad F_c = m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{1}{r} = \frac{mV^2}{r}.$$

Cette expression (39 *bis*) est celle de l'action développée par le mouvement et que la courbe exerce sur le mobile pour l'obliger à se dévier du côté du centre de courbure. Elle porte, en France, le nom de *force centripète* et, en Angleterre, celui de *force déviatrice*.

La force centripète a pour égale et contraire l'action exercée par le mobile sur la courbe fixe ou sur l'obstacle qui guide le mouvement. Cette force est ce qu'on appelle la *force centrifuge*, dont la formule (39 *bis*) est dès lors aussi l'expression. *La force centrifuge est donc en chaque point de la courbe proportionnelle à la masse et au carré de la vitesse du mobile et inversement proportionnelle au rayon de courbure en ce point.*

Il faut remarquer que, si, par suite d'une cause quelconque, un point ma-

tériel prenait dans l'espace une direction curviligne, la force centrifuge subsisterait toujours; seulement elle ne serait plus détruite, comme tout à l'heure, par la résistance de la courbe qui était donnée et sur laquelle le mobile était tenu de rester. Il suit de là que, dans le mouvement curviligne d'un point matériel dans l'espace, il faut que les forces appliquées à ce point puissent toujours être remplacées par deux forces, l'une tangentielle, qui produit le mouvement, l'autre dirigée suivant le rayon de courbure, qui détruit la force centrifuge. Supposons, en effet, la force R décomposée en deux autres P et Q dirigées suivant la tangente et le rayon de courbure au point (x, y, z); les équations (A_2) du numéro 33 deviendront :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P\frac{dx}{ds} + Q\frac{r}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = P\frac{dy}{ds} + Q\frac{r}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = P\frac{dz}{ds} + Q\frac{r}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

En multipliant ces trois équations respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ et les ajoutant, on arrivera, en remarquant que le terme en Q sera nul, puisque la direction de cette force est perpendiculaire à celle de P, à la relation

$$m\frac{d^2x\,dx + d^2y\,dy + d^2z\,dz}{dt^2} = P\,ds,$$

d'où

$$m\frac{d^2s\,ds}{dt^2} = P\,ds,$$

ou bien

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = P.$$

Cette expression est identiquement l'expression (39) de la force tangentielle trouvée plus haut.

Si maintenant on multiplie les trois équations du mouvement qui précèdent par $\frac{r}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $\frac{r}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $\frac{r}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right)$ et qu'on les ajoute, ce sera le coefficient de P qui s'annulera et l'on aura en définitive :

$$m\frac{r}{dt^2}\left[d^2x\,d\left(\frac{dx}{ds}\right) + d^2y\,d\left(\frac{dy}{ds}\right) + d^2z\,d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right] = Q\,ds,$$

ou bien

$$m\frac{r}{dt^2}\left[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2\right] = Q\,ds^2.$$

Mais on a, d'après les expressions connues du rayon de courbure,

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}},$$

ce qui transforme l'équation précédente en celle-ci :

$$\frac{m}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = Q,$$

expression identique avec l'expression (39 *bis*) de la force centrifuge.

La force Q, dirigée suivant le rayon de courbure et qui, dans le mouvement curviligne d'un point matériel dans l'espace, détruit en chaque instant du mouvement l'effet de la force centrifuge, est la force centripète. Elle est comme la cause du mouvement curviligne dans lequel un point matériel en mouvement est obligé, pour rester sur la courbe, de dévier à chaque instant de la direction rectiligne de la tangente à cette courbe dans laquelle son inertie tend à le maintenir.

La force centrifuge est, en définitive, la force avec laquelle le corps en mouvement sur une courbe réagit, en vertu de son inertie, sur cette courbe supposée matérielle, ou, pour parler le langage de la mécanique pratique, sur le corps qui le guide; elle est égale et opposée à la force centripète avec laquelle la courbe réagit sur le point matériel en mouvement, ou le corps guidant sur le corps guidé. *Force centripète et force centrifuge ne sont donc que deux dénominations de la même force, suivant qu'elle agit sur le corps en mouvement curviligne ou sur le corps qui guide un pareil mouvement.*

Pression sur la courbe. — Il serait facile de trouver l'expression de la pression exercée sur une courbe par le mobile obligé de la parcourir; elle serait évidemment la résultante des forces N et $-F_c$, et ses composantes, suivant les trois axes, auraient dès lors pour expressions :

$$X - T\frac{dx}{ds} - \frac{m}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{r}{ds} d\left(\frac{dx}{ds}\right) = X - m\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{ds} - \frac{m}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 d\left(\frac{dx}{ds}\right),$$

$$Y - T\frac{dy}{ds} - \frac{m}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{r}{ds} d\left(\frac{dy}{ds}\right) = Y - m\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dy}{ds} - \frac{m}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

$$Z - T\frac{dz}{ds} - \frac{m}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{r}{ds} d\left(\frac{dz}{ds}\right) = Z - m\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dz}{ds} - m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 d\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

et si la courbe était plane, la direction du rayon de courbure coïncidant alors

avec celle de la normale, la direction des forces N et $-F_c$ est la même, et la pression sur la courbe devient égale à leur somme.

54. *Application des résultats du numéro 53 à un corps qui n'est sollicité que par son propre poids.* — Supposons que le corps en mouvement sur la courbe donnée ne soit sollicité que par la pesanteur et que le mouvement ait lieu sur une courbe plane dont nous prendrons le plan pour plan des zx; nous compterons d'ailleurs les z de haut en bas dans le sens de la pesanteur.

On aura ici :

$$X = 0,$$
$$Y = 0,$$
$$Z = mg,$$

et l'expression (35) de T du numéro 53 deviendra

$$T = mg\frac{dz}{ds}.$$

Mais on a, d'après l'expression (39),

$$T = m\frac{d^2s}{dt^2},$$

d'où, égalant ces deux expressions,

$$\frac{d^2s}{dt^2}ds = gdz,$$

ou, puisque $ds = Vdt$,

$$VdV = gdz,$$

d'où, intégrant et déterminant la constante de manière que $V = V_0$ pour $z = 0$,

$$(40) \qquad \frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z,$$

équation qui n'est autre chose que l'équation (7) qui a été trouvée au numéro 49 pour le cas de la chute verticale des corps pesants. Il résulte de cette expression, dans laquelle la figure de la courbe n'entre absolument pour rien, que la vitesse du mobile dépend uniquement de sa chute verticale, et qu'elle est exactement la même que celle que prendrait le mobile pesant s'il tombait verticalement de cette hauteur, sans suivre la courbe.

Ces conséquences ne font, du reste, que confirmer sur un exemple ce qui

a déjà été établi d'une manière générale au numéro 39, à l'occasion du principe des forces vives, c'est que, dans le cas de l'existence d'un potentiel, la variation de la force vive est indépendante de la voie cinématique suivie par les points du système en mouvement. Reprenons l'expression de la fonction potentielle donnée au numéro 39 :

$$d\Phi = X dx + Y dy + Z dz.$$

Elle devient, pour le cas particulier qui nous occupe ici, puisque $X = 0$, $Y = 0$, $Z = mg$,

$$d\Phi = mg\, dz,$$

d'où, en intégrant et déterminant la constante de manière que $\Phi = \Phi_0$ pour $z = 0$,

$$\Phi - \Phi_0 = mgz. \tag{41}$$

On a, d'autre part, d'après l'équation (L″) du numéro 39,

$$\frac{\Sigma m V^2 - \Sigma m V_0^2}{2} = \Phi - \Phi_0,$$

qui devient ici, où nous ne considérons qu'un corps réduit à un point matériel,

$$\frac{mV^2 - mV_0^2}{2} = mgz,$$

d'où

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z,$$

ce qui reproduit les expressions (40) et (7).

L'expression (40), à laquelle on est arrivé plus haut, n'est autre chose que l'équation des forces vives pour le cas où le mobile qui parcourt la courbe donnée n'est sollicité que par son poids; mais il est intéressant d'établir, d'une manière générale, que le principe des forces vives s'applique aussi bien au cas du mouvement sur une courbe qu'à celui du mouvement d'un système libre dans l'espace, pour lequel il a été plus spécialement établi par les calculs donnés au numéro 38. L'équation (39) peut s'écrire ainsi qu'il suit, en multipliant ses deux membres par ds :

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} ds = T ds.$$

Mais on a, d'après l'équation (35),

$$T = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds},$$

d'où

$$m \cdot ds\frac{d^2s}{dt^2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz;$$

mais on a vu au numéro 38 que l'on avait

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = R\cos(Rds)\,ds,$$

d'où

$$m\,ds\frac{d^2s}{dt^2} = R\cos(R\,ds)\,ds,$$

ou, en intégrant entre les limites t et t_0,

$$\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \frac{m}{2}\left(\frac{ds_0}{dt_0}\right)^2 = \int_{s_0}^{s} R\cos(Rds)\,ds,$$

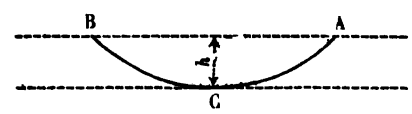
ou bien

$$\frac{mV^2 - mV_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} R\cos(Rds)\,ds.$$

Cette expression, en affectant ses deux membres du signe Σ pour l'appliquer à un système quelconque de points matériels, reproduit identiquement l'équation (L') donnée au numéro 38.

Revenons maintenant pour un instant à l'équation (40). Cette équation montre que, si la courbe offrait des ondulations, la vitesse atteindrait ses valeurs maxima et minima en même temps que z, c'est-à-dire au point où la tangente à cette courbe serait horizontale et où par conséquent le mobile pourrait se maintenir en équilibre. La vitesse deviendrait nulle chaque fois que le mobile reviendrait au point duquel il a commencé à descendre avec une vitesse initiale nulle, de sorte qu'il remonterait toujours au niveau de son point de départ en vertu de la vitesse qu'il aurait acquise pendant la descente. Ainsi, par exemple, si l'on faisait partir du point A (fig. 11) d'une courbe ACB située dans un plan vertical un mobile partant de ce point A avec une vitesse nulle, sa vitesse irait en s'accélérant à la descente pour atteindre son maximum $\sqrt{2gh}$ au point C, où la courbe a une tangente horizontale inférieure; il dépasserait le point C, en vertu de cette vitesse acquise, et remonterait avec une vitesse allant en diminuant pour arriver avec une vitesse nulle au point B situé sur l'horizontale menée du point A. Il redescendrait ensuite

Fig. 11.



de B vers C et remonterait jusqu'en A, exécutant ainsi des évolutions alternatives parfaitement égales, et qui se reproduiraient indéfiniment en vertu du seul jeu de la force vive qui emmagasine pendant la descente ce qu'il faut dépenser pour le travail de la remonte. Ce serait là le mouvement perpétuel, n'était la question des frottements, qui y vient mettre bon ordre et que nous allons examiner maintenant.

55. *Cas où l'on tient compte du frottement sur la courbe.* — Si l'on veut introduire dans le problème les résistances dues au frottement sur la courbe, c'est-à-dire sortir de la théorie pure pour entrer dans le domaine de la pratique, il faut admettre sur la nature du frottement des données purement expérimentales. Pour les corps solides glissant les uns sur les autres, l'expérience semble indiquer que *la résistance qui résulte de ce frottement est proportionnelle à la pression et indépendante de la vitesse.*

Admettons, pour simplifier, que la courbe matérielle sur laquelle se meut le mobile soit plane et située dans le plan vertical des zx, ce qui peut très bien s'admettre ici, puisque l'on suppose que le mobile n'est sollicité absolument que par son propre poids.

La pression sur un point quelconque de la courbe directrice est ici la somme de la composante du poids du mobile suivant la normale à cette courbe et de la force centrifuge ; cette expression a, par conséquent, pour valeur :

$$mg\frac{dx}{ds}+\frac{mV^2}{r};$$

et si l'on désigne par K le rapport de la résistance due au frottement à la pression, ou ce qu'en pratique on appelle le *coefficient du frottement*, cette résistance aura pour expression

$$K\left(mg\frac{dx}{ds}+\frac{mV^2}{r}\right),$$

et l'équation du mouvement deviendra :

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g\frac{dz}{ds}-K\left(g\frac{dx}{ds}+\frac{V^2}{r}\right). \tag{42}$$

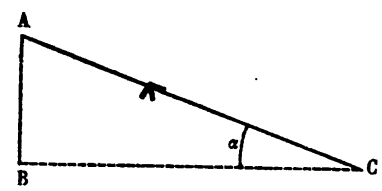
Il faudrait à cette équation joindre celle de la courbe donnée, qui serait de la forme

$$F(x,z)=0,$$

et l'intégration de l'équation (42) conduirait aux lois du mouvement.

56. *Application au plan incliné.* — Supposons que la ligne soit droite et qu'elle soit la ligne de plus grande pente d'un plan incliné, et appelons α l'angle que fait cette ligne AC (fig. 12) avec l'horizon.

Fig. 12.



La courbe étant ici une ligne droite, le rayon de courbure devient infini, et le terme de la force centrifuge disparaît de l'équation (42), qui devient

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\frac{dz}{ds} - Kg\frac{dx}{ds};$$

mais on a

$$\frac{dz}{ds} = \sin\alpha, \qquad \frac{dx}{ds} = \cos\alpha,$$

et, si l'on se rappelle que $V = \frac{ds}{dt}$, l'équation précédente devient

$$(43) \qquad \frac{dV}{dt} = g(\sin\alpha - K\cos\alpha),$$

d'où, intégrant et déterminant la constante de manière que $V = V_0$ pour $t = 0$,

$$(44) \qquad V = V_0 + g(\sin\alpha - K\cos\alpha)t,$$

ou bien

$$\frac{ds}{dt} = V_0 + g(\sin\alpha - K\cos\alpha)t,$$

d'où, intégrant et déterminant la constante de manière que $S = 0$ pour $t = 0$,

$$(45) \qquad S = V_0 t + g(\sin\alpha - K\cos\alpha)\frac{t^2}{2}.$$

Les équations (44) et (45) déterminent les lois du mouvement d'un corps solide sur un plan incliné.

Nous ferons remarquer maintenant que, si le mouvement devait devenir uniforme, on aurait $\frac{dv}{dt} = 0$, et l'équation (43) donnerait

$$(46) \qquad \sin\alpha - K\cos\alpha = 0,$$

d'où l'on déduirait

$$(47) \qquad K = \operatorname{tang}\alpha.$$

L'équation (46) n'est autre chose, d'ailleurs, que celle de l'équilibre des forces,

qui est, comme on le sait, une condition nécessaire du mouvement uniforme; elle peut s'écrire, en effet, de la manière suivante :

$$mg \sin \alpha - K mg \cos \alpha = 0.$$

Or $mg \sin \alpha$ est la composante du poids du corps suivant la ligne AC qui tend à le faire descendre sur cette ligne, et $-R mg \cos \alpha$ est la composante suivant la même ligne de la résistance que le frottement oppose à ce mouvement. L'expression (47) indique donc que la somme des composantes des forces suivant la même ligne AC est nulle. Cette condition, qui doit subsister pour le mouvement uniforme, subsiste aussi pour le cas de l'équilibre [1], de sorte que l'équation (47) donnera l'angle maximum sous lequel il faut placer le plan pour que le corps y reste en équilibre.

Il résulte de là un moyen pratique fort simple de déterminer, pour des corps de différentes natures, la valeur du coefficient de frottement K qui convient à chacun d'eux. Il suffira, en effet, de poser un corps d'une matière donnée sur un plan incliné d'une matière également donnée, et d'incliner le plan jusqu'à ce que le corps commence à se mettre en mouvement, et l'on mesurera l'angle α que fera en ce moment le plan avec l'horizon, et l'on aura K (du moins pour l'instant du départ) en substituant cette valeur de α dans l'équation (47). C'est ainsi que l'on a déterminé les valeurs numériques des coefficients de frottement des divers corps que l'on trouve dans certains ouvrages de mécanique pratique, et qui sont donnés au recueil de tables de M. Claudel.

L'expérience démontre que, pour des corps de même nature, le coefficient reste constant lorsque l'on fait varier l'étendue des surfaces frottantes, ce qui établit *que, pour les corps solides, le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces de contact.* D'autres expériences paraissent établir aussi, comme je l'ai déjà dit plus haut, que le frottement entre corps solides est indépendant de la vitesse (du moins après le départ); mais le fait n'est pas suffisamment établi pour qu'on puisse l'admettre comme absolument incontestable. Dans l'état actuel de nos connaissances sur ce point, on admet qu'il y a deux coefficients de frottement distincts, tous deux constants d'ailleurs, l'un pour l'instant du départ, l'autre pour le cas du mouvement établi. Il est incontestable que le premier de ces coefficients désigné plus haut par K est constant pour une même nature de corps solides; mais les expériences faites ne prouvent pas

[1] C'est ce qu'il est facile de voir ici même, indépendamment des principes généraux; car, s'il y a équilibre, on a $V = 0$, $V_0 = 0$, et l'équation (44) devient $g(\sin \alpha - K \cos \alpha) = 0$, qui conduit immédiatement à l'équation (46).

suffisamment qu'il en soit de même du second. Ce n'est donc que jusqu'à preuve contraire que ce dernier me paraît devoir être regardé comme indépendant de la vitesse. En tout état de cause, le coefficient au départ est toujours notablement plus fort que le coefficient en marche.

Si l'on suppose le frottement nul, on a $K=0$, et les équations (44) et (45) deviennent :

$$(48)\qquad \begin{cases} V = V_0 + g\sin\alpha\, t, \\ s = V_0 t + g\sin\alpha \frac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Ces équations ne sont autres, comme on devait s'y attendre, que les équations (6) données au numéro 49 pour les lois de la chute des corps pesants dans le vide, dans lesquelles g serait remplacé par sa composante $g\sin\alpha$ suivant le plan incliné et z par s. On aurait, d'ailleurs, en éliminant t entre les équations (48) :

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = s\sin\alpha;$$

mais la figure 12 donne :

$$s = \frac{z}{\sin\alpha},$$

d'où

$$(49)\qquad \frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z;$$

et nous retombons encore ainsi sur l'équation (7) du numéro 49, déjà reproduite aux numéros 50 et 54. De cette équation on conclut que, *sur un plan incliné où le frottement serait nul, la vitesse serait complètement indépendante de l'inclinaison du plan et qu'elle ne dépendrait que de la hauteur verticale de laquelle est descendu le corps.* Cette vitesse n'est autre que la vitesse due à cette hauteur. Cette propriété ne s'applique, bien entendu, qu'au cas où le frottement est nul.

Si l'on supposait que le plan incliné devînt vertical, on aurait :

$$\sin\alpha = 1, \qquad s = z,$$

et les équations (48) deviendraient :

$$V = V_0 + gt,$$
$$z = V_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

qui reproduisent exactement les équations (6) du numéro 49.

Enfin, si le plan devenait horizontal, on aurait $\sin\alpha = 0$, et les équations (48) se réduiraient à :

$$V = V_0,$$

$$s = V_0 t.$$

Le corps marcherait donc d'un mouvement uniforme avec sa vitesse initiale, qui se conserverait indéfiniment en grandeur comme en direction, étant toujours entendu que le frottement est nul.

57. *Mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface donnée.* — Je dois me borner à indiquer les points essentiels, et je ne traiterai la question qu'en faisant abstraction du frottement, pour me borner aux lois mathématiques du mouvement en lui-même. Je suppose toujours le point matériel sollicité par une résultante R des forces extérieures appliquée à son centre de gravité, point dans lequel est condensée la masse du corps ; les composantes suivant les trois axes rectangulaires des coordonnées sont toujours X, Y, Z. N est la résistance normale de la surface à la pression que lui impose le mouvement du mobile au point (x, y, z). La force R peut se décomposer en ce point en deux, l'une normale à la surface, l'autre dirigée dans le plan tangent et qui agit sur le mobile pour produire le mouvement. Il est facile de voir, en se rappelant les expressions que donne le calcul différentiel pour les cosinus des angles que la normale à une surface fait avec les axes des coordonnées, que les équations générales (A_2) données au numéro 33 deviennent ici :

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X - N\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y - N\frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}},\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}, \end{aligned}\right.$$

auxquelles il faudrait joindre l'équation de la surface :

$$(51)\qquad z = f(x, y).$$

Ces quatre équations détermineraient le mouvement du mobile et la résistance de la surface désignée par N.

Si l'on multiplie les trois équations (50) par les coefficients qui affectent N dans chacune d'elles et qu'on les ajoute, on trouve :

$$N = \frac{+\frac{X\,dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} - Z}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}} - m\frac{1}{dt^2}\frac{\frac{dz}{dx}d^2x + \frac{dz}{dy}d^2y - d^2z}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}.$$

Le premier terme du second membre de cette équation n'est autre chose qu'une force égale et directement opposée à la composante de R suivant la normale, et, quant au second terme, il peut se mettre sous la forme suivante, r étant le rayon de courbure :

$$-\frac{m}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \frac{r\left(\frac{dz}{dx}d^2x + \frac{dz}{dy}d^2y\right) - d^2z}{ds^2\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}.$$

Si l'on désigne par δ l'angle que fait la direction du rayon de courbure avec celle de la normale, et qu'on se rappelle les expressions que donne le calcul différentiel pour les cosinus des angles que fait la direction du rayon de courbure avec les axes, on aura

$$\cos\delta = \frac{\frac{r}{ds}\left[\frac{dz}{dx}d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dz}{dy}d\left(\frac{dy}{ds}\right) - d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}},$$

d'où, effectuant les différentiations et en se rappelant, d'ailleurs, la relation différentielle $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dx}dy$, on déduit

$$\cos\delta = \frac{r}{ds^2} \cdot \frac{\frac{dz}{dx}d^2x + \frac{dz}{dy}d^2y - d^2z}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}.$$

Le second terme du deuxième membre de l'expression de N peut donc en définitive s'écrire ainsi qu'il suit :

$$-\frac{m}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cos\delta,$$

ce qui n'est autre chose que la composante prise en sens contraire de la force centrifuge suivant la normale à la surface.

La pression normale N est donc la somme de deux forces qui ne sont autre chose que les composantes, suivant la normale à la surface, de la force extérieure et de la force centrifuge, prises en sens contraire. La force centrifuge ne pouvant se déterminer que si l'on connaît la vitesse, il faut connaître dès lors la trajectoire. Pour déterminer cette courbe, il suffit d'éliminer N entre les trois équations (50), ce qui conduira aux deux suivantes :

$$(52)\qquad \begin{cases} d^2x + \frac{dz}{dx} d^2z = \dfrac{ds^2\left(X + Z\frac{dz}{dx}\right)}{m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}, \\[2ex] d^2y + \frac{dz}{dy} d^2z = \dfrac{ds^2\left(Y + Z\frac{dz}{dy}\right)}{m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}. \end{cases}$$

A ces deux équations il faudra toujours joindre l'équation (51) de la surface qui servira à y substituer z en x et y, et il ne resterait plus qu'à déterminer le dénominateur $m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ des seconds membres des équations (52). Pour cela, il suffit de multiplier les équations (50) respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$, et de les ajouter et de se rappeler que, ds étant l'élément de trajectoire dont les projections sur les axes sont dx, dy, dz, cet élément est perpendiculaire à la normale à la surface. Le terme en N, qui résulte de l'addition des trois équations, doit dès lors disparaître, et le résultat sera la relation suivante :

$$m\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

ou bien

$$m\frac{ds\,d^2s}{dt^2} = R\,dr,$$

d'où, par l'intégration,

$$\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \frac{m}{2}\left(\frac{ds_0}{dt_0}\right)^2 = \int_{r_0}^{r} R\,dr,$$

ce qui reproduit encore l'équation des forces vives sous la forme (L″), dans laquelle elle a été donnée au numéro 38, et démontre que *le principe des forces vives reste applicable au cas du mouvement sur une surface, comme nous avons déjà vu qu'il l'était au mouvement sur une courbe donnée.*

On tirera de cette équation la valeur de $m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, en se donnant la vitesse initiale $\frac{ds_0}{dt}$, et on la substituera dans les équations (52), qui serviront ensuite à déterminer la projection de la trajectoire sur le plan des xy.

Si la force R était nulle ou dirigée constamment suivant la normale à la

surface, on aurait, dans le premier cas, $R = 0$, et, dans le second, $R\,dr = 0$, et l'équation des forces vives donne alors

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds_0}{dt},$$

ce qui indique que la vitesse initiale se conserverait et que, par conséquent, le mouvement serait uniforme. On aurait d'ailleurs

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0,$$

et les équations (52) deviendraient :

$$(53) \qquad \begin{cases} d^2x + \dfrac{dz}{dx}\,d^2z = 0, \\ d^2y + \dfrac{dz}{dy}\,d^2z = 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que, dans ce cas, le plan osculateur de la trajectoire est normal à la surface.

Reprenons, en effet, l'expression du cosinus de l'angle que le rayon de courbure fait avec la normale et qui est, comme on l'a vu plus haut,

$$\cos\delta = \frac{r}{ds^2} \cdot \frac{\dfrac{dz}{dx}\,d^2x + \dfrac{dz}{dy}\,d^2y - d^2z}{\sqrt{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2 + 1}},$$

et celle du rayon de courbure :

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Lorsque l'on a $d^2s = 0$, comme pour le cas qui nous occupe, cette expression de r devient

$$r = \frac{ds^2}{d^2z\sqrt{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2 + 1}},$$

et, si l'on substitue cette valeur de r dans celle de $\cos\delta$, celle-ci devient

$$\cos\delta = 1,$$

ce qui indique bien que la direction du rayon de courbure coïncide avec celle de la normale.

Il suit de là que, dans le cas particulier qui nous occupe, la pression sur la surface serait la somme de la force R et de la force centrifuge.

58. *Application à un corps sollicité uniquement par la pesanteur.* — Pour appliquer ce qui vient d'être dit dans le numéro 57 à un corps sollicité uniquement par la pesanteur, il faudrait prendre une surface déterminée, par exemple celle d'une sphère, et opérer pour ce cas particulier les calculs qui viennent d'être indiqués pour le cas général, en faisant, d'ailleurs, dans les formules du numéro 57,

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = mg,$$

les z étant maintenant comptés de haut en bas dans le sens de la pesanteur. Une pareille application n'offrirait pas grand intérêt au point de vue des questions que j'ai surtout à traiter, mais ce qu'il est essentiel de retenir, c'est ce qui résulte de l'équation des forces vives, qui donnerait ici, comme pour le cas du mouvement d'un point matériel pesant traité au numéro 49,

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z,$$

z étant la hauteur verticale qui sépare les deux points de la surface sur lesquels les vitesses du mobile seraient V_0 et V.

Il suit de là que, si entre deux points d'une surface on trace une infinité de courbes ayant toutes leurs tangentes à leurs points les plus bas situés dans le même plan horizontal, le mobile partant du point le plus haut de chacune de ces courbes arriverait au point le plus bas avec la même vitesse, quelle que fût celle des courbes qu'on lui aurait fait parcourir, ce qui ne fait que vérifier, d'ailleurs, le principe énoncé déjà au numéro 39, à savoir que, dans le cas où il y a un potentiel, la vitesse est absolument indépendante de la voie cinématique suivie par le corps en mouvement.

Ce n'est pas à dire pour cela que tous les mobiles partis du point le plus haut d'une des courbes arriveraient en même temps au point le plus bas.

Si la trajectoire était une ligne droite faisant un angle β avec l'axe des z, l'équation des forces vives écrite plus haut, et en y faisant pour simplifier $V_0 = 0$, conduirait immédiatement à la relation différentielle suivante, en y remplaçant V par $\frac{ds}{dt}$ et z par $s \cos \beta$,

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g\, s \cos \beta}},$$

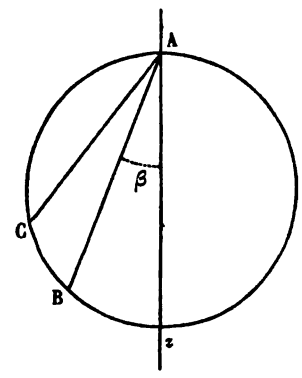
équation qui, étant intégrée de manière que $s=0$ pour $t=0$, donnerait

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g\cos\beta}}.$$

Ce résultat comporte une interprétation géométrique assez intéressante.

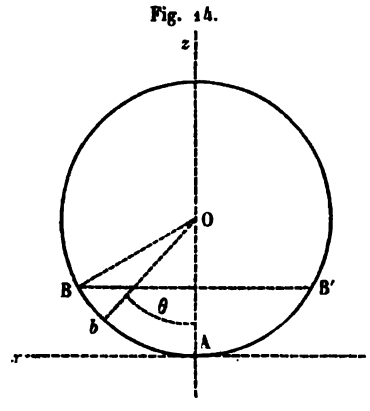
Supposons (fig. 13) que le plan du papier soit le plan vertical passant par l'axe Az des z et la ligne droite AC que suit le mobile, ligne droite faisant l'angle β avec cet axe. Si l'on fait varier β et s et si la trajectoire rectiligne prend, par exemple, la position AC, au lieu de la position AB, la valeur de t sera la même pour ces deux lignes si le rapport $\frac{s}{\cos\beta}$ est constant de l'une à l'autre, ce qui exige que les points B et C soient sur une circonférence passant par le point A, duquel est parti le mobile. On voit donc que, si l'on conçoit par la pensée un nombre quelconque de cônes circulaires à axe vertical, dont les génératrices seraient diversement inclinées par rapport à cet axe sur lequel ils auraient leur sommet commun, il arrivera qu'un nombre quelconque de corps, partant sans vitesse acquise de ce sommet, pour descendre suivant une génératrice quelconque de l'un quelconque de ces cônes, arriveront tous en même temps sur les circonférences suivant lesquelles les cônes couperaient une sphère de rayon quelconque passant par le sommet commun et ayant pour axe l'axe vertical commun de tous ces cônes.

Fig. 13.



59. *Mouvement, dans un plan vertical, d'un corps pesant assujetti à rester à une distance donnée d'un point fixe.* — Nous supposerons toujours la masse du corps concentrée dans son centre de gravité, ce qui nous ramène au cas du mouvement d'un point matériel lié à un point fixe autour duquel il peut tourner. Il est clair que le mobile ne peut, dans le plan vertical passant par le point fixe dans lequel le mouvement doit avoir lieu, se mouvoir que suivant la circonférence décrite, dans ce plan, du point fixe comme centre avec la distance constante à laquelle le mobile doit rester de ce point fixe prise pour rayon.

Fig. 14.



Supposons que le cercle soit rapporté (fig. 14) aux axes Az, Ax, que B

soit la position initiale du mobile, x_0, z_0 étant les coordonnées de ce point et b sa position pour des valeurs quelconques x, z des coordonnées. Si s_0, s sont les longueurs de l'arc compté à partir d'une origine quelconque sur la circonférence qui correspondront aux instants où le mobile sera sur les points (x_0, z_0) et (x, z), on aura, d'après le principe des forces vives, la relation

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = -2g(z_0 - z),$$

et, si l'on suppose que le mobile parte du point B sans vitesse initiale,

$$(54) \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -2g(z_0 - z).$$

Mais l'équation du cercle rapporté aux axes Ax, Az est, si l désigne la distance constante à laquelle le mobile doit rester du point fixe O,

$$z^2 + x^2 - 2lz = 0.$$

On a, d'ailleurs, d'après les relations données par le calcul différentiel,

$$ds = dz\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2},$$

équation qui, en ayant égard à celle du cercle, devient

$$ds = \frac{ldz}{\sqrt{2lz - z^2}},$$

d'où

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dz}{dt}\frac{l}{\sqrt{2lz - z^2}},$$

et si l'on substitue cette valeur de $\frac{ds}{dt}$ dans l'équation (54), et qu'on en tire dt, il viendra

$$dt = -\frac{ldz}{\sqrt{(2lz - z^2)(2g(z_0 - z)}},$$

d'où l'on tire, par intégration, la valeur de t :

$$(55) \qquad t = \int_{z_0}^{z} \frac{-ldz}{\sqrt{(2lz - z^2)\,2g(z_0 - z)}}.$$

Cette formule donne le temps qu'il faudrait au mobile pour descendre du point B (fig. 14), dont l'ordonnée est z_0, au point b, dont l'ordonnée est z.

Il faut remarquer maintenant que le mobile, partant du point B sans vitesse initiale et n'étant sollicité que par son propre poids, commencera par descendre vers le point A, où il arrivera avec la vitesse $\sqrt{2gz_0}$, en vertu de laquelle il dépassera ce point, pour remonter avec une vitesse décroissante jusqu'au point B′ situé à la même hauteur z_0 que le point B. Sa vitesse devenant nulle, du point B′ il redescendra ensuite vers A, pour remonter jusqu'en B et ainsi de suite, de sorte que le mobile exécutera une série d'oscillations dont l'amplitude sera mesurée par l'arc BAB′. Si l'on prend l'intégrale entre les limites $z = z_0$ et $z = 0$, elle donnera la durée d'une demi-oscillation, et si on designe cette durée par $\frac{T}{2}$, on aura

$$\frac{T}{2} = \int_{z_0}^{0} \frac{-l\,dz}{\sqrt{(2lz - z^2)\,2g\,(z_0 - z)}}.$$

L'intégration de cette expression ne peut se faire qu'approximativement par un développement en série qui donne

$$(56) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{z_0}{2l} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(\frac{z_0}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 \left(\frac{z_0}{2l}\right)^3 + \cdots\right].$$

Si l'on suppose l'oscillation très petite, c'est-à-dire la valeur des z_0 très petite par rapport à celle de l, l'expression précédente devient, à une approximation suffisante,

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

On peut, d'ailleurs, arriver encore très simplement à cette formule en suivant la marche indiquée par M. Résal. Si l'on désigne par θ l'angle boA (fig. 14), correspondant à une position quelconque b du mobile, la composante tangentielle de l'accélération sera $g \sin\theta$. D'un autre côté, la vitesse du mobile b sur la circonférence a pour expression $l\frac{d\theta}{dt}$, de sorte que l'on a immédiatement l'équation du mouvement :

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta,$$

et, si l'on se renferme dans le cas d'oscillations très petites, on peut remplacer $\sin\theta$ par θ, et l'on a

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta,$$

dont l'intégrale est

$$(57) \qquad \theta = M\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + N\sin t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

M, N étant deux constantes arbitraires. Mais nous avons supposé que, pour la position initiale B du mobile au point $\theta = \theta_0$, la vitesse était nulle, ce qui donne pour ce point :

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

On déduit de là les valeurs des constantes :

$$N = 0, \qquad M = -\theta_0,$$

d'où, par l'équation (57),

$$\theta = \theta_0 \cos t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

et, si l'on désigne par T la durée d'une oscillation simple de B en B′, cette durée sera donnée par la condition

$$T\sqrt{\frac{g}{l}} = \pi,$$

qui réduirait l'équation précédente à

$$\theta = -\theta_0,$$

d'où l'on déduit

(58) $$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

comme par le premier calcul.

Cette formule exprime la loi du mouvement d'un corps pesant assujetti à osciller autour d'un point fixe sur une tige rigide et de longueur invariable; le système constitue ce qu'on appelle *le Pendule*.

60. *Application à la détermination de l'accélération de la pesanteur.* — De la formule (58) on tire

(59) $$g = \frac{\pi^2 l}{T^2},$$

et, pour déterminer l'accélération g de la pesanteur dans le lieu où l'on se trouve, il suffirait de déterminer expérimentalement, au moyen d'un chronomètre, la durée T de l'oscillation d'un pendule de longueur donnée l, en deduisant, par une simple division, cette durée, pour atténuer l'erreur, de celle d'un grand nombre d'oscillations successives dont on n'aurait à évaluer que la durée totale et le nombre total. C'est, en effet, au moyen d'expériences pendulaires que l'on est parvenu à déterminer la valeur de g; mais il faut

remarquer que, pour que la formule (58) et, par conséquent, la formule (59) donnent une approximation suffisante, il faut que la longueur du pendule soit très grande par rapport à l'amplitude de l'oscillation. Il faut remarquer de plus qu'en pratique les pendules ne peuvent se composer d'un point matériel pesant relié au centre fixe par un rayon idéal invariable. Ils sont composés en général d'une sphère ayant la plus grande masse possible sous le plus petit volume, en platine par exemple, et reliée au point fixe par un fil accroché à ce point, la masse du fil étant négligeable par rapport à celle de la sphère. Le mouvement du centre de cette sphère qui représenterait notre point matériel n'éprouve de la part des liaisons du système aucune perturbation appréciable; le mouvement du corps oscillant n'est ni accéléré ni retardé par l'influence de ces liaisons, et il oscille comme s'il était isolé. La distance, exactement mesurée, du centre d'oscillation au point de suspension est la valeur de l qu'il faut mettre dans l'équation (59); mais on ne doit pas se dissimuler qu'il y a toujours, dans la détermination du véritable centre d'oscillation, eu égard à la composition matérielle du pendule, une certaine incertitude, qui rend ces opérations fort délicates et qui exige des appareils tout à fait spéciaux que l'on ne trouve que dans les observatoires. Il est incontestable, toutefois, que, dans ce mode d'expérimentation, on peut, sans crainte d'erreur, négliger l'influence de la résistance de l'air, attendu que l'on n'a affaire qu'à de très faibles vitesses.

Si l'on voulait se servir du procédé direct qu'offrirait la loi de la chute des corps graves déterminée par les équations (3) du numéro 49, on ferait tomber un corps pesant de hauteurs déterminées, et l'on observerait les temps qu'il mettrait à tomber de ces hauteurs z sur le sol, et de la seconde des équations (3) on tirerait

$$g = \frac{2z}{t^2}, \tag{60}$$

équation qui, z étant donné et t déterminé comme il vient d'être dit, donnerait immédiatement la valeur de g. Mais pour que ce procédé fût tant soit peu exact, il faudrait nécessairement que t pût prendre des valeurs facilement appréciables au chronomètre, et que, dès lors, les hauteurs z desquelles on ferait tomber le corps fussent assez grandes; mais alors la résistance de l'air introduit immédiatement une sérieuse cause d'erreur, puisqu'elle croît rapidement avec la vitesse. C'est ce qui explique pourquoi le procédé d'expérience au moyen du pendule a été adopté de préférence pour déterminer la valeur g de l'accélération de la pesanteur dans un lieu donné.

61. *Variation de l'accélération de la pesanteur avec l'altitude et la latitude du lieu.* — On sait que, d'après la grande loi de l'attraction découverte par Newton, *tous les corps s'attirent en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances.* C'est cette loi qui régit le mouvement des corps pesants et qui doit servir de base à l'analyse que nous allons faire du mouvement d'un corps dont la masse serait concentrée dans son centre de gravité ou d'un point matériel pesant vers le centre de la terre.

Je supposerai d'abord la terre sphérique, et j'appellerai R son rayon moyen égal au double de la distance du pôle à l'équateur, divisé par le rapport π de la circonférence au diamètre [1].

g désignera l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre, ou, plus exactement, au niveau de la mer, accélération qui est évidemment constante dans l'hypothèse de la sphéricité où nous commençons par nous placer.

Désignons par D la distance au centre O de la terre d'un point A situé au-dessus de sa surface et que nous prendrons pour origine des z comptés de haut en bas dans le sens de la pesanteur, c'est-à-dire de A vers O sur la verticale qui joint ces deux points.

g' sera d'ailleurs l'accélération imprimée par la pesanteur au corps de masse m lorsqu'il est à la distance z de l'origine A des coordonnées.

La loi de l'attraction énoncée plus haut donnera immédiatement entre ces diverses quantités la relation

$$mg' = mg \cdot \frac{R^2}{(D-z)^2}, \tag{61}$$

et les équations générales (A_2) du mouvement de translation du numéro 33 se réduisent ici à l'équation unique

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg',$$

ou

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{gR^2}{(D-z)^2}, \tag{62}$$

qui donne, par une première intégration,

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g\frac{R^2}{D-z} + \text{const.},$$

[1] On sait que cette distance est 10 millions de mètres, de sorte qu'on aurait :

$$R = \frac{20.000.000}{3,1416} = 6.366.200 \text{ mètres.}$$

ou bien

$$V^2 = 2g\frac{R^2}{D-z} + \text{const.}$$

On tirerait de là, en déterminant la constante de manière que $V = 0$ pour $z = 0$,

(63) $$V^2 = 2gz \cdot \frac{R^2}{D(D-z)},$$

ou bien

(63 *bis*) $$V = \frac{R}{\sqrt{D(D-z)}}\sqrt{2gz},$$

d'où

(64) $$z = \frac{V^2}{2g} \cdot \frac{1}{\frac{R^2}{D^2} + \frac{V^2}{2gD}}.$$

On arriverait, d'ailleurs, immédiatement à l'équation (63) au moyen du principe des forces vives. Le travail de la force serait, en effet,

$$\int \frac{mg \cdot R^2\, dz}{(D-z)^2} = mg \cdot \frac{R^2}{D-z} + \text{const.},$$

et l'équation des forces vives devient

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mgR^2}{D-z} + \text{const.},$$

et, si l'on détermine la constante de manière que $V = 0$ pour $z = 0$,

$$V^2 = 2gz \cdot \frac{R^2}{D(D-z)},$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (63).

Dans les expressions (63 *bis*) et (64) on voit reparaître l'expression $\sqrt{2gz}$ de la vitesse due à la hauteur z, et celle de $\frac{V^2}{2g}$ de la hauteur due à la vitesse V que nous avons déjà remarquées au numéro 49, dans lequel il a été question de la chute des corps graves dans l'hypothèse d'une valeur absolument constante de l'accélération de la pesanteur, c'est-à-dire dans un lieu donné. La variation de cette accélération avec la distance au centre de la terre du point d'où part le mobile, ou avec l'altitude de ce point au-dessus du niveau de la mer, a pour résultat de faire multiplier les expressions $\sqrt{2gz}$ et $\frac{V^2}{2g}$, trouvées au numéro 49, respectivement par $\frac{R^2}{D(D-z)}$ et par $\frac{1}{\frac{R^2}{D^2} + \frac{V^2}{2gD}}$, comme le montrent les expressions (63 *bis*) et (64) comparées aux expressions (5) et (4) du numéro 49.

Revenons maintenant à l'équation (62), de laquelle nous tirons, après y avoir remplacé V par $\frac{dz}{dt}$,

$$dt = \sqrt{\frac{D}{2g R^2}}\, dz \cdot \sqrt{\frac{D-z}{z}}.$$

L'intégrale de cette équation différentielle, qui s'obtient facilement en se servant d'une variable auxiliaire et en posant $z = D\cos^2\varphi$, est, en déterminant d'ailleurs la constante de manière que l'on ait $z = 0$ pour $t = 0$,

$$(65) \qquad t = \sqrt{\frac{D}{2g R^2}}\left[\sqrt{Dz - z^2} + \frac{D}{2}\arccos\frac{D-2z}{D}\right].$$

Pour avoir le temps que mettrait le corps pour arriver à la surface de la terre, il faudrait dans cette équation faire $z = D - R$, ce qui donnerait

$$(66) \qquad t = \sqrt{\frac{D}{2g R^2}}\left[\sqrt{R(D-R)} + \frac{D}{2}\arccos\frac{2R-D}{D}\right].$$

La vitesse acquise par le corps au bout de ce temps s'obtiendrait d'ailleurs en faisant $z = D - R$ dans l'équation (63), ce qui donnerait

$$(67) \qquad V^2 = 2g\frac{(D-R)R}{D}.$$

Ces expressions, en appelant H l'altitude ou la hauteur au-dessus du niveau de la mer du point A, et en remarquant, d'ailleurs, que l'on aurait identiquement $D = R + H$, peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$(68) \qquad t = \sqrt{\frac{R+H}{2g R^2}}\left[\sqrt{RH} + \frac{R+H}{2}\arccos\frac{R-H}{R+H}\right],$$

$$(69) \qquad V^2 = 2g\frac{RH}{R+H}.$$

La première de ces expressions donnerait le temps que mettrait à arriver à la surface de la terre un corps tombant d'une hauteur H au-dessus de cette surface, et la seconde donnerait la vitesse acquise par ce corps au moment où il toucherait le sol.

L'expression (68) donnerait g, si, H ayant une valeur donnée, on déterminait t par l'observation du temps que mettrait le corps à tomber de cette hauteur sur le sol; mais la même cause d'erreur existerait ici que si l'on se servait purement et simplement de l'équation (60) du numéro 59. Il faudrait,

pour que l'expérience fût assez exacte, prendre pour H une grande valeur; mais alors la vitesse deviendrait elle-même assez grande pour qu'il ne fût plus permis de négliger la résistance de l'air, de laquelle les équations (68) et (69) ne tiennent pas plus compte que les équations (3) du numéro 49, dont on a déduit l'expression (60).

Remarquons maintenant que, si l'on introduit l'altitude H dans la valeur de g' donnée par l'expression (61), celle-ci devient

$$g' = \frac{g}{\left(1 + \frac{H}{R}\right)^2}.$$

Comme en général H est très petit par rapport à R, on peut, dans le développement de $\left(1 + \frac{H}{R}\right)^2$ en série, négliger les puissances de $\frac{H}{R}$, et il viendrait à cette première approximation :

$$(70) \qquad g' = \frac{g}{1 + \frac{2H}{R}}.$$

Cette formule ne serait d'ailleurs applicable que pour le cas où l'on s'élèverait directement dans l'air; ce serait celle des aéronautes. Mais s'il s'agit de déplacements à la surface de la terre, comme ceux que nous avons uniquement à considérer ici, la pesanteur décroît moins vite, attendu que les couches terrestres contiguës exercent une attraction locale sensible; et, pour tenir compte de cette circonstance on a été conduit empiriquement à porter à $\frac{5}{4}$ le coefficient 2 de $\frac{H}{R}$, ce qui donne la formule suivante :

$$(70\ bis) \qquad g' = \frac{g}{1 + \frac{5H}{4R}}.$$

Telle serait l'expression de l'accélération de la pesanteur en tenant compte de l'altitude du lieu, g étant la valeur constante de cette accélération pour le même lieu, mais au niveau de la mer.

Dans les calculs qui viennent d'être indiqués, on a supposé la terre sphérique et l'on n'a d'ailleurs tenu aucun compte de son mouvement de rotation; il y a dès lors des corrections à y faire.

Le globe terrestre est, comme on le sait, un ellipsoïde de révolution dont l'axe est celui de sa rotation diurne. L'aplatissement de la terre vers ses pôles a été évalué numériquement, dans le siècle dernier, par le mesurage, en divers

lieux, de l'arc du méridien correspondant à un degré, et il résulte de ce défaut de sphéricité que l'intensité de la pesanteur va en augmentant, de l'équateur au pôle, proportionnellement au carré du sinus de la latitude du lieu, d'où résulte que l'accélération de la pesanteur augmenterait proportionnellement à ce carré.

Quant au mouvement de rotation diurne de la terre, il donne lieu à une force centrifuge qui tend à diminuer celle de l'attraction. Cette rotation s'effectuant en 86164 secondes, sa vitesse angulaire a aurait pour expression :

$$a = \frac{2\pi}{86164} = 0,000073.$$

Quelque faible que soit cette vitesse par rapport aux vitesses que l'on a à considérer dans la plupart des applications de la mécanique, elle n'en a pas moins une influence appréciable, qui a été mise en évidence par des expériences spéciales bien connues.

M. Résal a donné, dans le tome Ier de sa Mécanique, l'expression suivante de la déviation causée par le mouvement diurne :

$$\Delta = \frac{2}{3} a \cos\lambda z \left(\frac{2z}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Un corps pesant tombant sans vitesse initiale d'une hauteur z decrirait donc, dans le plan vertical passant par la tangente au parallèle du lieu dont la latitude serait λ, une parabole du degré $\frac{3}{2}$ au lieu d'une ligne droite. L'expression précédente concorde du reste avec le résultat d'une expérience faite par M. Reich dans les mines de Freyberg.

Les données de cette expérience sont :

$$z = 150.50, \qquad \lambda = 51^\circ,$$

et, si l'on substitue dans la formule précédente ces valeurs numériques de z et λ, celle de a trouvée plus haut, et pour g le nombre 9.809, elle donne :

$$\Delta = 0,0276;$$

le nombre correspondant constaté par l'expérience des mines de Freyberg étant 0,0283, on voit que les deux nombres sont à très peu près égaux.

L'effet de la force centrifuge due à la rotation diurne de la terre est de diminuer la valeur de g d'une petite quantité, qui, nulle aux pôles, augmente à

mesure que l'on se rapproche de l'équateur. D'un autre côté, le défaut de sphéricité de la terre, supposée sphérique dans les calculs précédents, fait que l'action de la pesanteur, au lieu d'être dirigée vers le centre, l'est suivant la ligne normale à la surface des eaux, c'est-à-dire suivant la ligne que l'on appelle verticale. L'intensité de cette action augmente de l'équateur au pôle par suite de la diminution du rayon, d'une petite quantité proportionnelle au carré du sinus de la latitude du lieu. La correction relative à la non-sphéricité est donc proportionnelle à $\sin^2\lambda = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\lambda)$; celle qui provient de la force centrifuge, et qui vaut simplement la composante de cette force suivant la verticale, est proportionnelle à $-\cos^2\lambda = \frac{1}{2}(-1 - \cos 2\lambda)$. La partie variable de ces corrections est donc en tout proportionnelle à $-\cos 2\lambda$, et la formule pratique à laquelle je m'arrêterai est celle qui est aujourd'hui en usage dans l'artillerie sur tous les polygones français, et qui est, en remplaçant g' par g, qui exprime maintenant l'accélération de la pesanteur en fonction de l'altitude H et de la latitude λ du lieu :

$$g = \frac{9.80570\,(1 - 0{,}002588 \cos 2\lambda)}{1 + \frac{5H}{4R}}. \tag{71}$$

Dans cette formule, 9.80570 est la valeur de g au niveau de la mer pour une latitude de 45°. La formule montre qu'à altitude égale l'accélération de la pesanteur augmente avec la latitude, et qu'à latitude égale elle diminue à mesure que l'altitude augmente.

La table suivante a été calculée au moyen de cette formule :

VALEURS DE λ.	VALEURS DE g POUR H =					
	0 MÈTRE.	100 MÈTRES.	200 MÈTRES.	300 MÈTRES.	400 MÈTRES.	500 MÈTRES.
	m.	m.	m.	m.	m.	m.
40 degrés.....	9.80129	9.80109	9.80090	9.80071	9.80052	9.80032
41.....	9.80217	9.80197	9.80178	9.80159	9.80140	9.80120
42.....	9.80305	9.80285	9.80266	9.80247	9.80228	9.80208
43.....	9.80393	9.80373	9.80354	9.80335	9.80316	9.80296
44.....	9.80481	9.80461	9.80442	9.80423	9.80404	9.80384
45.....	9.80570	9.80550	9.80531	9.80512	9.80493	9.80473
46.....	9.80659	9.80639	9.80620	9.80601	9.80582	9.80562
47.....	9.80747	9.80727	9.80708	9.80689	9.80670	9.80650
48.....	9.80835	9.80815	9.80796	9.80777	9.80758	9.80738
49.....	9.80923	9.80903	9.80884	9.80865	9.80846	9.80826
50.....	9.81011	9.80991	9.80972	9.80953	9.80934	9.80816

Cette table permettra de calculer par interpolation toutes les valeurs de g pour les latitudes comprises entre 40° et 50° et jusqu'à l'altitude 500 mètres.

La formule (70 *bis*) pourra, d'ailleurs, toujours, pour des altitudes supérieures à celles de 500 mètres, limite de la table, servir à calculer la valeur de g' que prendrait g pour l'altitude H lorsqu'on connaît sa valeur g pour la latitude du lieu et au niveau de la mer. En substituant dans la formule (70 *bis*) les valeurs de g données par la seconde colonne de la table en regard de celles de λ contenues dans la première colonne, on pourra immédiatement calculer pour une latitude donnée la valeur de g' de l'accélération de la pesanteur qui correspondrait à une altitude quelconque.

La valeur de g est, dans la pratique, regardée comme constante pour toute la France et il en est de même en Angleterre, et l'on admet pour tous les calculs de mécanique, dans les deux pays, le nombre 9.809, qui serait la valeur que prendrait g entre le 48e et le 49e degré de latitude et au niveau de la mer. C'est le nombre déterminé par les expériences faites à l'Observatoire de Paris, dont la latitude est 48° 50′ 14″.

ART. 4. — CONSIDÉRATIONS SUR LE MOUVEMENT COMPLET D'UN SYSTÈME RIGIDE ET INEXTENSIBLE DANS L'ESPACE.

62. *Pourquoi l'on aborde cette question.* — Dans toutes les applications faites dans l'article 3 des principes généraux exposés à l'article 2, je n'ai considéré que le mouvement de translation et même le mouvement de translation du centre de gravité, dans lequel je supposais la masse du corps concentrée. Il n'a été question, en un mot, dans ces applications, que du système (A_2) des équations de translation. Dans l'hydrodynamique, qui doit être l'objet principal de la partie théorique de mon travail, l'application des équations de rotation ne se présente pas en général, et j'aurais pu, dès lors, m'arrêter ici en ce qui concerne ce que j'avais à exposer de mécanique; mais j'ai pensé qu'il convenait de compléter mon étude par quelques considérations sur le mouvement d'un système tel qu'il résulte de la coexistence des équations (A_2) et (B_2) de translation et de rotation données au numéro 33. Le lecteur aura ainsi à sa disposition un petit traité de mécanique suffisant pour le diriger dans la plupart des applications qu'il pourrait être appelé à faire de cette science.

63. *Quelques détails préliminaires relatifs au mouvement de rotation.* — Lors-

qu'un système invariable est en mouvement de translation, tous les points de ce système sont animés de vitesses égales et parallèles; lorsqu'il est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe relié au système et autour duquel celui-ci tourne, les vitesses des divers points du système sont proportionnelles aux distances de ces points à l'axe de rotation et s'obtiennent en faisant les produits de ces distances par la vitesse angulaire commune à tous les points du système. Dans le mouvement de translation, la vitesse linéaire, au bout du temps t, est la même pour tous les points du système; dans le mouvement de rotation, elle varie proportionnellement aux distances de ces points à l'axe de rotation. Il est facile de démontrer par la simple géométrie que dans le mouvement de rotation, où tous les points du système décrivent des circonférences dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, l'angle formé par les rayons abaissés de deux points quelconques du système sur l'axe reste constant; de sorte que, si, dans les plans perpendiculaires à l'axe de rotation passant par les divers points du système, θ représente l'angle du rayon vecteur avec un axe fixe situé dans le plan normal à l'axe de rotation passant par le point auquel appartient ce rayon, $\frac{d\theta}{dt}$ sera la vitesse angulaire, qui sera, à un instant donné, la même pour tous les points du système, mais qui variera avec le temps si le mouvement n'est pas uniforme. Connaissant la vitesse angulaire a d'un système en mouvement de rotation, on obtient immédiatement la vitesse linéaire V d'un quelconque de ces points en multipliant la vitesse angulaire par la distance r du point à l'axe de rotation; de sorte que l'on a

$$V = ar.$$

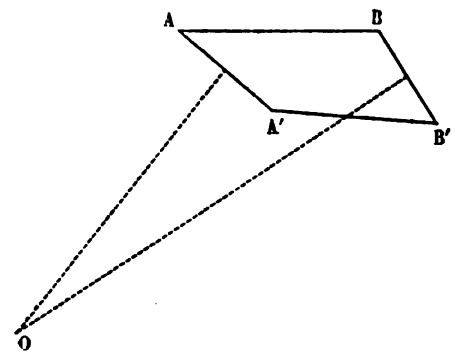
La vitesse angulaire n'est autre chose, comme on le voit, que la vitesse linéaire d'un point situé à une distance de l'axe de rotation égale à l'unité, définition que j'ai déjà donnée au numéro 45 à propos du mouvement uniforme.

En résumé, *la vitesse linéaire dans le mouvement de translation et la vitesse angulaire dans le mouvement de rotation, tout en variant avec le temps, restent les mêmes, à un instant donné de chacun de ces mouvements, pour tous les points du système, quelle que soit la position relative de ces points.*

64. *Centres et axes instantanés de rotation.* — Examinons maintenant le mouvement d'une figure plane dans son plan. Il suffit de considérer le mouvement de la ligne rigide qui joint deux points A et B de cette figure.

Supposons (fig. 15) que le plan dans lequel se meut la figure plane soit le plan du papier. La ligne AB prendra, au bout d'un intervalle de temps très court, la position A'B', et les points A et B auront subi les déplacements élémentaires AA' et BB'. Si sur le milieu des lignes AA', BB' on élève des perpendiculaires, celles-ci iront se rencontrer en un point O, qui est un centre instantané de rotation. Ce point est tel que les déplacements AA', BB' s'obtiendraient en faisant tourner autour de ce point la figure mobile dont la ligne AB fait partie, de sorte que le mouvement de translation des points A et B peut se remplacer par leur mouvement de rotation autour du point O.

Fig. 15.

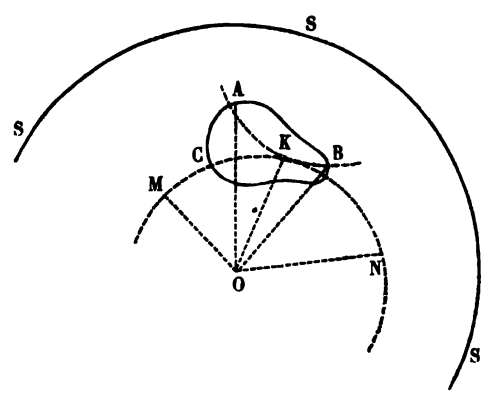


Si l'on considère maintenant, au lieu de déplacements finis AA', BB', les déplacements successifs infiniment petits des points A et B sur leurs trajectoires, dont AA', BB' deviennent des arcs infiniment petits, ce sont les normales à ces axes qui viennent se rencontrer en O; on conclura facilement, de ce qui vient d'être dit, que, dans le mouvement d'une figure plane dans son plan, les normales élevées sur les trajectoires des différents points de cette figure, à un instant donné du mouvement, vont toutes se rencontrer en un point, et c'est ce point qu'on appelle *centre instantané de rotation*. La figure tourne autour de ce point d'un angle très petit dans un intervalle de temps très petit, et les arcs décrits pendant cet instant par les divers points de la figure, sont proportionnels à leur distance au centre instantané. Le mouvement de rotation de la figure autour de ce point peut donc, pendant cet intervalle de temps très petit, remplacer le mouvement de translation des divers points de la figure sur les arcs élémentaires de leurs trajectoires très petits. Si l'on considère d'ailleurs une suite de ces mouvements élémentaires, on aura une suite de centres instantanés, qui, joints entre eux, forment le polygone des centres instantanés; de sorte que le mouvement d'une figure plane dans son plan peut se définir par le déroulement d'un polygone invariablement lié à cette figure sur celui des centres instantanés. A la limite, et pour la continuité du mouvement, ces polygones deviennent des courbes, de sorte qu'en définitive le mouvement d'une figure plane dans son plan n'est autre chose qu'un mouvement épicycloïdal. Tout ce qui vient d'être dit pour le mouve-

ment d'une figure plane dans son plan s'applique, d'ailleurs, à celui d'une figure sphérique sur la surface de la sphère, et ce mouvement est dès lors un mouvement épicycloïdal sphérique.

Si, au lieu du mouvement d'une figure plane dans un plan, on considère celui d'un corps solide qui se meut parallèlement à un plan fixe, il est facile de voir que des considérations analogues à celles qui précèdent conduisent à ce résultat, que le déplacement élémentaire des points de ce solide peut être remplacé par une rotation élémentaire autour d'un axe perpendiculaire au plan fixe parallèlement auquel a lieu le mouvement du solide. Cet axe prend le nom d'*axe instantané de rotation*, et sa position se détermine en cherchant le centre instantané de rotation de l'une quelconque des figures planes qui résulteraient de l'intersection du solide avec des plans parallèles au plan fixe. En abaissant de ce point ainsi déterminé une perpendiculaire sur le plan fixe, on a l'axe instantané de rotation. Enfin, si l'on considère le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, il est évident d'abord que l'axe instantané de rotation passe par ce point, et si l'on coupe le corps par une sphère de rayon quelconque ayant le point fixe pour centre, la figure résultant de cette intersection tournera, sur la surface de la sphère, autour d'un axe instantané passant par le point fixe, et, comme cette figure fait, en même temps, partie du corps solide auquel elle est invariablement liée, il s'ensuit que ce corps lui-même tournera autour du même axe. Il est, d'ailleurs, facile de voir que le mouvement élémentaire d'une figure sphérique sur la surface de la sphère ne peut avoir pour axe instantané qu'un diamètre de cette surface, et les points où ce diamètre rencontre la surface sont les *pôles instantanés*. Il s'ensuit que, dans le cas qui nous occupe, l'axe instantané de rotation est la droite qui joint le point fixe et le pôle instantané.

Fig. 16.



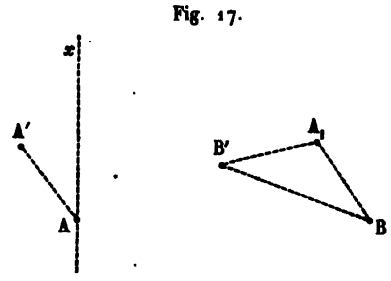
Considérons maintenant le mouvement du solide dans sa continuité. O est (fig. 16) le point fixe, ABC la figure suivant laquelle est coupé le corps par une sphère S de rayon quelconque. Le mouvement de cette figure sur la surface de la sphère est, comme on l'a vu plus haut, un mouvement épicycloïdal, et l'on reproduit ce mouvement en faisant rouler une cer-

taine ligne AKB, appartenant à la figure, sur une ligne MCKN, appartenant à la surface de la sphère. Or ce mouvement de la figure ACB, qui fait corps avec le solide, suffit pour fixer celui du solide lui-même, et l'on peut considérer les lignes AKB, MCKN comme étant les directrices des deux surfaces coniques, ayant toutes deux le point O pour sommet. Le roulement sur la sphère de la courbe AKB sur la courbe MCKN équivaut donc au roulement du cône OAB sur le cône fixe OMN; d'où résulte que le mouvement d'un solide autour d'un point fixe est celui qu'on obtiendrait en faisant rouler une surface conique, appartenant au solide et ayant le point fixe pour sommet, sur une surface conique fixe dans l'espace et ayant ce même point pour sommet. Il suit de là que la position de l'axe instantané de rotation à un moment donné du mouvement est donné par celle de la génératrice OK de contact des deux cônes.

Il est facile de voir, d'ailleurs, que le mouvement d'une figure plane dans son plan n'est qu'un cas particulier du mouvement d'un solide autour d'un point fixe. Il suffit pour cela de supposer que le rayon de la sphère devienne infini. La surface sphérique devient alors un plan, nos deux cônes deviennent des cylindres, et nos deux lignes de roulement les courbes des sections de ces cylindres par des plans perpendiculaires à leurs génératrices; de sorte que le mouvement continu d'un solide, parallèlement à un plan fixe, peut être considéré comme étant le résultat du roulement d'une surface cylindrique faisant partie du corps solide sur une surface cylindrique fixe dans l'espace, les génératrices de ces deux surfaces étant perpendiculaires au plan fixe.

Considérons enfin le cas général du mouvement d'un corps solide libre dans l'espace, et d'abord occupons-nous du mouvement élémentaire. Soit A et B (fig. 17) les positions de deux points du solide à un instant donné; A′, B′ leurs positions au bout d'un intervalle de temps très petit compté à partir de cet instant; les déplacements élémentaires correspondants seront les droites AA′ et BB′, qui représenteront les vitesses des points A et B multipliées par le temps très petit qu'il aura fallu à ces points pour arriver en A′ et B′. On peut, d'après ce que nous savons, appliquer aux déplacements élémentaires les principes de la composition et de la décomposition des vitesses, de sorte que le déplacement BB′ peut se décomposer en deux autres, dont l'un BA_1,

Fig. 17.



égal et parallèle à AA′, est un déplacement de translation; l'autre, $B'A_1$, est un déplacement de rotation ; car le point B décrit le chemin A_1B', pendant que le point A arrivé en A′ reste fixe.

Ce qui vient d'être dit pour le point B s'appliquerait, d'ailleurs, à tout autre point du système; de sorte que le mouvement élémentaire du solide libre dans l'espace est ramené à un mouvement de translation et à un mouvement de rotation autour d'un point fixe. Ce point est quelconque; car, au lieu de choisir le point B, comme nous l'avons fait, on aurait pu prendre tout autre point du solide; on reconnaîtrait, d'ailleurs, facilement que la rotation reste constante en grandeur et en direction, quelle que soit la position du point fixe. Enfin il existe une position de l'axe instantané de rotation pour laquelle la translation est parallèle à la direction de cet axe, qui prend alors le nom d'axe *instantané de rotation et de glissement;* de sorte que l'on est conduit à regarder le mouvement élémentaire du solide comme un mouvement hélicoïdal par rapport à cet axe unique.

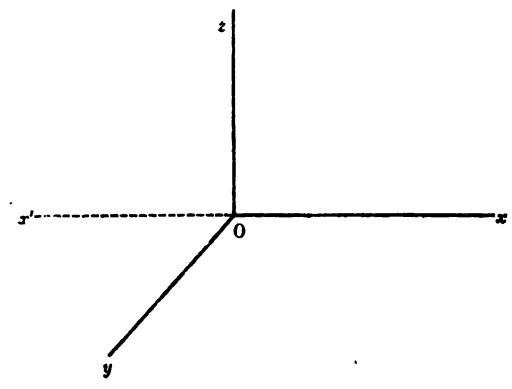
Si l'on passe maintenant au mouvement continu du solide, qui est une suite de mouvements élémentaires se faisant chacun autour de son axe instantané de rotation et de glissement, on est conduit à considérer deux surfaces réglées, l'une qui est le lieu des positions de l'axe instantané de rotation et de glissement dans l'espace, l'autre celui des positions du même axe dans le solide. Cette dernière surface, qui fait corps avec le solide, restera sur la première, considérée comme fixe dans l'espace; de sorte que le mouvement du solide sera, en définitive, produit par le roulement d'une surface réglée sur une autre, en vertu duquel les génératrices rectilignes de la surface mobile viendront successivement s'appliquer sur celles de la surface fixe, en tournant autour de chacune d'elles, la surface mobile ayant d'ailleurs, en même temps, un mouvement de translation le long de chaque génératrice commune aux deux surfaces.

65. *Mesure et composition des rotations élémentaires. — Composition des vitesses angulaires.* — La vitesse angulaire par rapport à l'axe de rotation et la position de cet axe définissent entièrement une rotation. On peut dès lors, sur la ligne droite suivant laquelle est dirigé cet axe, porter à partir d'un point déterminé, pris pour origine, une longueur représentant la vitesse angulaire, et la rotation sera ainsi représentée par une longueur déterminée prise sur son axe. C'est une convention analogue à celles que nous avons vues pour les couples et les moments des forces; le signe de la rotation sera donné par

celui de son axe, le spectateur étant couché sur cet axe de manière que ses pieds soient dirigés vers l'origine et que, placé dans cette position, il voie le mouvement se faire de gauche à droite.

Ox, Oy, Oz représentent (fig. 18) trois axes des coordonnées rectangulaires autour desquels se font trois rotations. L'observateur couché sur l'axe Ox, la tête vers x et les pieds vers O, verra tourner de gauche à droite, si la rotation se fait de y vers z, tandis que, s'il est couché suivant $x'O$, il verra tourner de gauche à droite, si la rotation se fait de z en y, c'est-à-dire en sens contraire de celle qui avait lieu tout à l'heure. Il s'ensuit que, si les axes positifs de rotation sont comptés suivant Ox, les axes négatifs devront l'être suivant Ox'. Il en serait de même des rotations par rapport aux axes des y et des z, et l'on voit dès lors que, si la rotation est représentée par son axe, cet axe étant défini comme ceux des couples et des moments des forces, elle suit, dans ses signes, la loi générale des coordonnées par rapport à leur origine.

Fig. 18.



Cette convention établie, on en déduirait facilement que les lois qui régissent la composition et la décomposition des forces et de leurs moments exposées dans la statique, lois qui s'appliquent aussi, comme on l'a vu aux numéros 30 et 31, à la composition et à la décomposition des vitesses et des déplacements élémentaires de translation, s'appliquent encore aux vitesses angulaires et aux déplacements élémentaires de rotation. C'est toujours le parallélogramme des forces qui en est la base, et ici l'axe de rotation résultant de deux axes de rotation qui se rencontrent serait la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux axes, le mot d'axe étant entendu comme nous l'avons défini tout à l'heure et comprenant à la fois la direction de l'axe de rotation et la vitesse angulaire par rapport à cet axe.

On est donc en mesure maintenant de composer et décomposer les mouvements de rotation comme ceux de translation.

L'analyse permet, du reste, d'arriver à ces règles sans passer par des démonstrations géométriques. Désignons par δx, δy, δz les déplacements suivant les trois axes rectangulaires des x, des y et des z d'un point du solide inva-

riable que nous considérons, et par $\delta\varphi$, $\delta\chi$, $\delta\psi$ les déplacements angulaires des mêmes axes, il est facile de voir qu'on aura les relations :

$$(\mathrm{p})\qquad \begin{cases} \delta x = z\delta\chi - y\delta\psi, \\ \delta y = z\delta\varphi - x\delta\psi, \\ \delta z = y\delta\varphi - x\delta\chi, \end{cases}$$

et, si l'on exprime que le déplacement est nul, on aura :

$$z\delta\chi - y\delta\psi = 0,$$
$$z\delta\varphi - x\delta\psi = 0,$$
$$y\delta\varphi - x\delta\chi = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{x}{d\varphi} = \frac{y}{\delta\chi} = \frac{z}{\delta\psi}.$$

Or les coordonnées qui satisfont à cette condition sont celles d'une ligne droite passant par l'origine, et les cosinus des angles que cette ligne ferait avec les axes des x, des y et des z auraient pour expressions :

$$\frac{\delta\varphi}{\sqrt{(\delta\varphi)^2+(\delta\chi)^2+(\delta\psi)^2}},\quad \frac{\delta\chi}{\sqrt{(\delta\varphi)^2+(\delta\chi)^2+(\delta\psi)^2}},\quad \frac{\delta\psi}{\sqrt{(\delta\varphi)^2+(\delta\chi)^2+(\delta\psi)^2}}.$$

Tous les points placés sur cette ligne restant immobiles, puisqu'elle résulte de l'hypothèse $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, il s'ensuit qu'elle est l'axe instantané de rotation correspondant aux déplacements angulaires $\delta\varphi$, $\delta\chi$, $\delta\psi$ autour des trois axes des coordonnées.

Prenons maintenant l'équation d'une surface sphérique ayant l'origine des coordonnées pour centre et passant par le point dont x, y, z sont les coordonnées; cette équation sera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

r étant la distance de ce point à l'origine, centre de la sphère. L'arc décrit en vertu des déplacements δx, δy, δz a pour expression

$$\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2},$$

et, si on le considère à raison de son déplacement angulaire autour de l'axe

instantané, il s'exprime aussi par $r\delta\theta$, $\delta\theta$ étant ce déplacement; de sorte qu'on aura

$$r\delta\theta = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2};$$

d'où, substituant les valeurs de δx, δy, δz en fonction de $\delta\varphi$, $\delta\chi$, $\delta\psi$ données plus haut :

$$r\delta\theta = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)(\delta\varphi^2+\delta\chi^2+\delta\psi^2) - (x\delta\varphi + y\delta\chi + z\delta\psi)^2};$$

d'où, en ayant égard à l'équation de la surface sphérique:

$$\delta\theta = \sqrt{d\varphi^2 + \delta\chi^2 + \delta\psi^2 - \frac{(x\delta\varphi + y\delta\chi + z\delta\psi)^2}{r^2}}.$$

Mais, si le point est dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation passant par l'origine, on a

$$x\delta\varphi + y\delta\chi + z\delta\psi = 0;$$

d'où l'on déduit

$$d\theta = \sqrt{(\delta\varphi)^2 + \delta\chi^2 + \delta\psi^2},$$

équation qui démontre que *les rotations se composent et se décomposent absolument comme les translations.*

66. *Mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe.* — Analysons maintenant le mouvement d'un solide ou système invariable autour d'un axe fixe. Nous pouvons prendre, pour cet axe, un des axes des coordonnées. Prenons, par exemple, l'axe des x. Les trois équations (B_2) du numéro 33 se réduisent à une seule, qui est la suivante :

$$\Sigma m\left(z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma\left(Yz - Zy\right).$$

Si a désigne la vitesse angulaire ou la vitesse de rotation des points situés à l'unité de distance de l'axe, et que r soit la distance d'un point quelconque du solide au même axe, on aura :

$$\frac{dy}{dt} = ar\frac{z}{r},$$

$$\frac{dz}{dt} = ar\frac{y}{r},$$

et l'équation précédente devient, en y substituant ces valeurs différentiées par rapport à t,

$$\frac{da}{dt}\Sigma mr^2 = \Sigma(Yz - Zy);$$

mais si P est la résultante des deux forces Y et Z et l la distance de sa direction à l'axe de rotation, on aura

$$\Sigma Pl = \Sigma(Yz - Zy);$$

d'où

$$\text{(q)} \qquad \frac{da}{dt} = \frac{\Sigma Pl}{\Sigma mr^2}.$$

La quantité Σmr^2 a reçu, d'après Euler, le nom de *moment d'inertie*. Sa valeur varie avec la forme des corps et se détermine par le calcul intégral pour chaque figure particulière de corps.

Si le mouvement était un mouvement de translation dans le plan des y, z, V désignant dans ce cas la vitesse, on déduirait facilement des équations (A_1) du numéro 33, en y faisant $X = 0$, $x = 0$,

$$(q_1) \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{\Sigma P}{\Sigma m}.$$

L'équation (q) du mouvement de rotation se déduirait donc de celle du mouvement de translation (q_1), en remplaçant, dans cette dernière, les forces par leurs moments par rapport à l'axe de rotation, les masses par leurs moments d'inertie par rapport au même axe, et la vitesse de translation par la vitesse angulaire.

On peut, d'ailleurs, si M désigne la masse totale Σm du système, poser

$$MR^2 = \Sigma mr^2,$$

d'où

$$R^2 = \frac{\Sigma mr^2}{M}.$$

R est ce qu'on appelle le *rayon de giration;* l'emploi de son expression simplifie souvent les formules.

Le mouvement de rotation donne naissance à des efforts sur l'axe fixe dont les composantes, suivant les axes des y et des z dont le plan est perpendiculaire à cet axe, ont pour expressions :

$$\Sigma\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

et

$$\Sigma\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

$-m\frac{d^2y}{dt^2}$ et $-m\frac{dz}{dt^2}$ expriment les inerties, et les distances x', x'' à l'origine des coordonnées des points d'application de ces composantes, distances comptées sur l'axe de rotation, ont pour valeurs :

$$(r)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{\Sigma\left(Yx - mx\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)}{\Sigma\left(Y - m\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)}, \\[2ex] x'' = \dfrac{\Sigma\left(Zx - mx\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)}{\Sigma\left(Z - m\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)}. \end{cases}$$

Si l'on substitue, d'ailleurs, dans ces équations les valeurs de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ en fonction de la vitesse angulaire déduites de celles de $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ dejà employées plus haut, elles deviennent :

$$(s)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{\Sigma\left(Yx - m\,xz\dfrac{da}{dt} + m\,xy\,a^2\right)}{\Sigma\left(Y - m\,z\dfrac{da}{dt} + m\,y\,a^2\right)}, \\[2ex] x'' = \dfrac{\Sigma\left(Zx + m\,xy\dfrac{da}{dt} + m\,xz\,a^2\right)}{\Sigma\left(Z - m\,y\dfrac{da}{dt} + m\,z\,a^2\right)}. \end{cases}$$

Supposons que le système ne soit sollicité par aucune force, ou que les forces qui le sollicitent soient en équilibre, l'équation (q) devient, dans ce cas,

$$\frac{da}{dt} = 0,$$

ce qui indique que la vitesse angulaire est constante et qu'elle reste égale à sa valeur initiale a_0.

Les expressions (S) se réduisent, d'ailleurs, en vertu de cette relation et des relations

$$\Sigma Y = 0,$$

$$\Sigma Z = 0,$$

qui conviennent ici au cas de l'équilibre des forces ou à celui des forces nulles, aux suivantes :

$$(t)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{\Sigma ma^2xy}{\Sigma mq^2y} = \dfrac{\Sigma mxy}{\Sigma my}, \\ x'' = \dfrac{\Sigma ma^2xz}{\Sigma mq^2z} = \dfrac{\Sigma mxz}{\Sigma mz}. \end{cases}$$

En se rappelant que la force centrifuge a pour valeur $\frac{mV^2}{r}$ (n° 53) ou bien ma^2r, puisque l'on a ici $V = ar$, il est facile de voir que Σma^2y et Σma^2z sont les composantes de la force centrifuge suivant les axes des y et des z, et Σma^2xy, Σma^2xz leurs moments par rapport à l'axe de rotation.

Si l'on voulait que l'axe n'eût plus aucun effort à supporter, il faudrait que l'on eût :

$$(u)\qquad \begin{cases} \Sigma my = 0, \\ \Sigma mz = 0, \end{cases}$$

et, de plus,

$$(v)\qquad \begin{cases} \Sigma mxy = 0, \\ \Sigma mxz = 0. \end{cases}$$

La première de ces deux conditions est satisfaite pour le centre de gravité, ainsi qu'on l'a vu au numéro 21 *bis*, et il suffit dès lors que l'axe de rotation passe par le centre de gravité du corps. Les équations (V) de la seconde condition peuvent aussi être satisfaites par une direction spéciale de l'axe de rotation.

Un axe passant par le centre de gravité et déterminé, d'ailleurs, de manière à satisfaire aux équations (V), présente donc cette remarquable propriété que, le corps étant libre et les forces qui le sollicitent étant nulles ou en équilibre, ce corps conservera toujours, dans sa rotation autour de l'axe, une vitesse constante, sans que cet axe, qui ne supporte aucun effort, puisse subir aucun déplacement; il devient ainsi un axe *permanent* ou *naturel de rotation*.

Lorsque l'axe fixe ne passe point par le centre de gravité, on n'a plus les équations (t); mais, si l'on avait, dans ce cas,

$$(w)\qquad \frac{\Sigma mxy}{\Sigma my} = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mz},$$

les valeurs de x' et x'' deviendraient égales, et les efforts, étant ainsi appliqués au même point de l'axe, peuvent être composés en un seul effort résultant, qui serait détruit si l'on rendait ce point fixe. La condition (w) donne donc à l'axe

la propriété de devenir un axe permanent en rendant fixe un seul de ses points.

On démontre d'ailleurs que, par un point quelconque d'un solide en mouvement de rotation, on peut toujours faire passer trois droites rectangulaires entre elles, telles qu'en les prenant pour axes des coordonnées, on ait les trois relations :

$$(\mathrm{v}') \qquad \begin{cases} \Sigma mxy = 0, \\ \Sigma mxz = 0, \\ \Sigma myz = 0. \end{cases}$$

On en conclura qu'il existe toujours trois axes permanents de rotation perpendiculaires entre eux et passant par le centre de gravité, et qu'en outre il existe, pour un point quelconque du système, trois axes également rectangulaires entre eux et qui deviendraient des axes permanents de rotation si ce point était rendu fixe. Euler a donné à ces lignes le nom d'axes *principaux de rotation*, qui leur est resté. Ces axes jouissent encore d'une propriété caractéristique, c'est qu'en prenant les moments d'inertie par rapport à eux, ces moments sont des maxima ou des minima.

Je ne m'arrêterai pas plus longtemps sur ces axes, dont la détermination se fait par d'assez longs calculs, que l'on trouve dans tous les traités de mécanique et auxquels il n'y aurait pas grand intérêt à s'attarder ici.

67. *Mouvement d'un système invariable libre dans l'espace.* — Pour analyser ce mouvement je désignerai par x_1, y_1, z_1 les coordonnées au bout du temps t du centre de gravité du système, comptées sur trois axes rectangulaires fixes, et par x, y, z les coordonnées au bout du temps t d'un point quelconque de masse m du système, rapportées à trois axes rectangulaires passant par le centre de gravité et parallèles aux trois axes fixes. Ces nouveaux axes sont mobiles avec le centre de gravité, mais restent constamment parallèles aux axes fixes.

Cette convention d'axes mobiles, tout en conservant un système d'axes fixes, est la seule que l'on puisse faire pour suivre toutes les évolutions d'un corps en mouvement; elle est commode et simple, et le choix du centre de gravité comme origine des axes mobiles est bien justifié.

Les coordonnées d'un point du système de masse m comptées à partir de l'origine des trois axes fixes des x_1, y_1, z_1 seraient ainsi x_1+x, y_1+y et z_1+z. Il faudra donc, dans les équations générales du mouvement (A_2) et

(B_2) du numéro 33, remplacer x, y, z par x_1+x, y_1+y, z_1+z, et elles deviendront :

$$\Sigma m \frac{d^2x_1+d^2x}{dt^2} = \Sigma X,$$

$$\Sigma m \frac{d^2y_1+d^2y}{dt^2} = \Sigma Y,$$

$$\Sigma m \frac{d^2z_1+d^2z}{dt^2} = \Sigma Z;$$

$$\Sigma\left[m\frac{d^2z_1+d^2z}{dt^2}(y_1+y) - m\frac{d^2y_1+d^2y}{dt^2}(z_1+z)\right] = \Sigma\left[Z(y_1+y) - Y(z_1+z)\right],$$

$$\Sigma\left[m\frac{d^2x_1+d^2x}{dt^2}(z_1+z) - m\frac{d^2z_1+d^2z}{dt^2}(x_1+x)\right] = \Sigma\left[X(z_1+z) - Z(x_1+x)\right],$$

$$\Sigma\left[m\frac{d^2y_1+d^2y}{dt^2}(x_1+x) - m\frac{d^2x_1+d^2x}{dt^2}(y_1+y)\right] = \Sigma\left[Y(x_1+x) - X(y_1+y)\right].$$

Nous avons déjà vu, au numéro 34, que le premier de ces deux systèmes d'équations se réduisait, en vertu des propriétés propres au centre de gravité, au système suivant, qui détermine entièrement le mouvement de ce point, M désignant la masse entière du système égale à la somme Σm des masses individuelles qui le composent :

$$(K) \qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X, \\[2ex] M\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \\[2ex] M\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z. \end{cases}$$

Ces équations indiquent que *le centre de gravité se meut comme si toute la masse du corps y était concentrée et que toutes les forces qui sollicitent le système y fussent directement appliquées*. C'est l'énoncé du principe du mouvement du centre de gravité, qui a déjà été établi au numéro 34.

En vertu des équations (K) et des trois relations qui appartiennent au centre de gravité lorsqu'on le prend pour origine, et qui sont :

$$\Sigma mx = 0,$$

$$\Sigma my = 0,$$

$$\Sigma mz = 0,$$

le second des systèmes d'équations posées plus haut devient :

$$(K')\qquad \begin{cases} \Sigma m\left(\frac{d^2z}{dt^2}y-\frac{d^2y}{dt^2}z\right)=\Sigma\left(Zy-Yz\right), \\ \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}z-\frac{d^2z}{dt^2}x\right)=\Sigma\left(Xz-Zx\right), \\ \Sigma m\left(\frac{d^2y}{dt^2}x-\frac{d^2x}{dt^2}y\right)=\Sigma\left(Yx-Xy\right). \end{cases}$$

Le système (K) détermine le mouvement de translation du centre de gravité du corps, et le système (K') le mouvement de rotation autour de ce centre, et il est facile de voir, en se reportant aux développements donnés aux numéros 65 et 66, que, dans le mouvement du solide autour de son centre de gravité, le déplacement élémentaire qui a lieu dans chaque intervalle infiniment petit dt du temps peut être regardé comme dû à la rotation du corps autour d'un axe instantané passant par son centre de gravité. Cet axe tourne lui-même autour du centre de gravité et prend, par rapport aux plans fixes des coordonnées, des inclinaisons diverses.

Lorsque les forces X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z, le mouvement du centre de gravité dépend nécessairement de celui des parties du système par rapport à ce centre; mais lorsque les forces sont constantes, ou seulement si leurs expressions sont indépendantes de x, y, z, comme cela arrive pour les corps pesants, par exemple, le mouvement du centre de gravité sera entièrement déterminé par le système d'équations (K), et, dans ce cas, le système (K') détermine les mouvements autour du centre de gravité d'une manière absolument indépendante de son mouvement de translation déterminé par les équations (K).

Il est facile d'ailleurs de voir que le principe des forces vives s'applique au mouvement par rapport au centre de gravité. Il suffit pour cela de reprendre ici l'équation (N) du numéro 38

$$(N)\qquad \Sigma\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\Sigma\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\Sigma\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z=0;$$

en y remplaçant x, y, z par x_1+x, y_1+y, z_1+z, et en se rappelant que les propriétés du centre de gravité entraînent les conditions

$$\Sigma mx=0,$$
$$\Sigma my=0,$$
$$\Sigma mz=0;$$

d'où l'on déduit :

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

et

$$\Sigma m \delta x = 0,$$

$$\Sigma m \delta y = 0,$$

$$\Sigma m \delta z = 0,$$

l'équation (N) deviendra :

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\delta x_1 + \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y_1}{dt^2}\delta y_1 + \frac{d^2x}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z_1}{dt^2}\delta z_1 + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$
$$- \Sigma\left[X\left(\delta x_1 + \delta x\right) + Y\left(\delta y_1 + \delta y\right) + Z\left(\delta z_1 + \delta z\right)\right] = 0,$$

ou bien

$$M\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\delta x_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\delta y_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\delta z_1\right) - \Sigma\left(X\delta x_1 + Y\delta y_1 + Z\delta z_1\right)$$
$$+ \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) - \Sigma\left(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\right) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\left(M\frac{d^2x_1}{dt^2} - \Sigma X\right)\delta x_1 + \left(M\frac{d^2y_1}{dt^2} - \Sigma Y\right)\delta y_1 + \left(M\frac{d^2z_1}{dt^2} - \Sigma Z\right)\delta z_1$$
$$+ \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) - \Sigma\left(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\right) = 0,$$

qui, en vertu des équations (K) du mouvement de translation du centre de gravité se réduit à

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \Sigma\left(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\right);$$

si l'on fait remarquer, ce qui a, du reste, déjà été dit au numéro 38, que les conditions de liaison du système sont des fonctions de x, y, z, mais, en général, indépendantes du temps, on pourra, dans l'équation précédente, remplacer δx, δy, δz par les déplacements réels dx, dy, dz, et cette équation deviendra :

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x\,dx}{dt^2} + \frac{d^2y\,dy}{dt^2} + \frac{d^2z\,dz}{dt^2}\right) = \Sigma\left(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\right),$$

de laquelle on déduira, en se rappelant que $V = \frac{ds}{dt}$,

$$\Sigma mv dV = \Sigma(X dx + Y dy + Z dz);$$

d'où, en intégrant,

$$\Sigma m \frac{V^2}{2} = \Sigma \int (X dx + Y dy + Z dz) + \text{const.},$$

équation qui reproduit identiquement l'équation (L) du numéro 38; seulement x, y, z sont ici les coordonnées d'un point quelconque de masse m du système par rapport au centre de gravité de ce système, tandis que dans l'équation (L) x, y, z sont les coordonnées de ce point par rapport à un point fixe quelconque pris pour origine.

Le principe des forces vives s'applique donc tout aussi bien au mouvement d'un corps solide par rapport à son centre de gravité qu'à ce mouvement rapporté à un point fixe quelconque pris pour origine.

Lorsque le mouvement de translation du centre de gravité n'est plus indépendant du mouvement général du corps, c'est-à-dire lorsque les forces X, Y, Z contiennent, dans leurs expressions analytiques, les coordonnées x, y, z comptées à partir du centre de gravité, le principe des forces vives n'en demeure pas moins applicable, et c'est ce qui me reste à établir.

Le système sera toujours animé d'une double vitesse, d'une vitesse de translation égale à celle de son centre de gravité et d'une vitesse de rotation autour de ce centre de gravité. Soit U la vitesse de translation du centre de gravité à un instant donné; la vitesse de rotation aura pour expression ar, a étant la vitesse angulaire et r la distance d'un point du système au centre de gravité. La force vive due à la vitesse de translation du centre de gravité aura pour expression $\Sigma m U^2 = M U^2$, M étant la masse totale d'un groupe de parties du système dont chacune a m pour masse individuelle, et la force vive due à la vitesse de rotation autour du centre de gravité aura pour expression :

$$\Sigma m . a^2 r^2 = a^2 \Sigma m r^2,$$

expression qui, eu égard à la valeur du rayon de giration donnée au numéro 66, devient

$$a^2 \Sigma m r^2 = M a^2 R^2.$$

aR est une vitesse linéaire, et si l'on pose $aR = U_1$, l'expression $a^2 \Sigma m r^2$ de la force vive prend la forme MU_1^2, qu'elle a dans la formule générale du principe des forces vives.

Si l'angle des deux vitesses U et U_1 spéciales à un point quelconque du système est ε, leur résultante vaudra $U^2 + U_1^2 + 2UU_1 \cos\varepsilon$; de sorte que la force vive du système deviendra :

$$\begin{aligned}\Sigma m V^2 = \Sigma m U^2 + \Sigma m a^2 r^2 + \Sigma 2 m a U r \cos\varepsilon &= MU^2 + Ma^2R^2 + \Sigma 2 m a U r \cos\varepsilon \\ &= MU^2 + MU_1^2 + \Sigma 2 m U U_1 \cos\varepsilon.\end{aligned}$$

Mais il est facile de démontrer que $\Sigma 2UU_1 \cos\varepsilon$ est nul. On a, en effet,

$$\Sigma m \left(\frac{dx_1 + dx}{dt}\right)^2 = \Sigma m \frac{dx_1^2}{dt^2} + \Sigma m \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{2dx_1}{dt} \Sigma m \frac{dx}{dt},$$

ou bien, puisque $\Sigma mx = 0$ et par conséquent $\Sigma m \frac{dx}{dt} = 0$,

$$\Sigma m \left(\frac{dx_1 + dx}{dt}\right)^2 = M \frac{dx_1^2}{dt^2} + \Sigma m \frac{dx^2}{dt^2};$$

par suite, on aurait aussi :

$$\begin{aligned}\Sigma m \left[\left(d\frac{(x_1 + x)}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{(y_1 + y)}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{(z_1 + z)}{dt}\right)^2\right] &= M\left(\frac{dx_1^2}{dt^2} + \frac{dy_1^2}{dt^2} + \frac{dz_1^2}{dt^2}\right) \\ &+ \Sigma m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) = MU^2 + MU_1^2,\end{aligned}$$

de sorte qu'en définitive, l'équation des forces vives prend pour expression la plus générale celle qui est indiquée ci-après :

$$(L_3) \qquad \frac{\Sigma MV^2 - \Sigma MV_0^2}{2} = \Sigma T_m - \Sigma T_r,$$

ΣT_m et ΣT_r désignant les sommes de tous les groupes de travaux dynamométriques moteurs et résistants exprimés en kilogrammètres. On voit que cette forme de l'équation des forces vives est, aux notations près, celle qu'on lui a trouvée au numéro 83, et le *principe des forces vives s'applique, dès lors, à toute espèce de mouvements, qu'ils soient de translation ou de rotation, ce qui lui donne le caractère de généralité le plus complet.*

68. *Cas où les forces qui sollicitent le corps en mouvement sont nulles ou en équilibre ou que leur résultante passe par son centre de gravité.* — Si les forces sont en équilibre, les seconds membres des équations (K) et (K') sont nuls en vertu des équations (A) et (B) du numéro 12. Il en est de même lorsque les forces

X, Y, Z sont nulles, et, dans un de ces cas comme dans l'autre, les équations (K) deviennent :

$$(K_1)\qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=0, \\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=0, \\ M\dfrac{d^2z_1}{dt^2}=0, \end{cases}$$

équations qui indiquent que le centre de gravité se meut d'un mouvement uniforme et rectiligne.

Quant aux équations (K'), elles deviennent :

$$(K_2)\qquad \begin{cases} \Sigma m\left(\dfrac{d^2z}{dt^2}y-\dfrac{d^2y}{dt^2}z\right)=0, \\ \Sigma m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}z-\dfrac{d^2z}{dt^2}x\right)=0, \\ \Sigma m\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}x-\dfrac{d^2x}{dt^2}y\right)=0, \end{cases}$$

ou bien

$$\Sigma m\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}y-\frac{dy}{dt}z\right)=0,$$
$$\Sigma m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}z-\frac{dz}{dt}x\right)=0,$$
$$\Sigma m\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}x-\frac{dx}{dt}y\right)=0;$$

d'où, en intégrant,

$$(K_3)\qquad \begin{cases} \Sigma m\left(\dfrac{dz}{dt}y-\dfrac{dy}{dt}z\right)=A, \\ \Sigma m\left(\dfrac{dx}{dt}z-\dfrac{dz}{dt}x\right)=B, \\ \Sigma m\left(\dfrac{dy}{dt}x-\dfrac{dx}{dt}y\right)=C, \end{cases}$$

A, B, C étant des constantes.

On remarquera maintenant que $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ sont les composantes, suivant les trois axes des coordonnées, des quantités de mouvement dont chaque point de masse m du corps est animé au bout du temps t. Toutes ces quantités de mouvement représentent des forces qui peuvent se composer d'après les règles de la statique, et l'on trouverait ainsi que les premiers membres des trois équations qui viennent d'être données représentent les moments des couples situés dans les plans des yz, zx et xy. Les moments de ces couples

conservent donc des valeurs constantes, et il en est dès lors de même du couple résultant, dont le moment a pour valeur

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

La direction de son axe reste constante aussi, puisque les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes des x, y, z ont pour expressions :

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

quantités qui sont constantes avec A, B, C.

On remarquera, d'ailleurs, que le système des équations (K_2) s'appliquerait encore au cas où la résultante des forces qui sollicitent le système passerait par son centre de gravité, comme cela arrive pour les corps pesants, puisque, dans ce cas, les seconds membres des équations (K′) sont encore nuls.

On voit, en résumé, que, si, dans le mouvement général des corps, l'axe instantané de rotation prend autour du centre de gravité des positions diverses, il n'en est pas de même de celui du couple résultant des quantités de mouvement, qui reste constamment parallèle à sa position initiale.

Le système des équations (K_3) conduit encore à quelques conséquences intéressantes qu'il est bon de faire connaître. Ces équations (K_3) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\Sigma m(ydz - zdy) = A\,dt,$$
$$\Sigma m(zdx - xdz) = B\,dt,$$
$$\Sigma m(xdy - ydx) = C\,dt.$$

Si l'on conçoit un rayon vecteur dirigé du centre de gravité sur un point de masse m, les quantités $ydz - zdy$, $zdx - xdz$ et $xdy - ydx$ représentent le double des aires infiniment petites décrites dans le temps dt par les projections de ce rayon vecteur sur les plans des yz, des zx et des xy. Les équations précédentes montrent que ces aires croissent proportionnellement au temps.

Les aires At, Bt, Ct, décrites au bout du temps t sur les trois plans coordonnés sont proportionnelles aux moments des trois couples composants des quantités de mouvement déterminés par les équations (K_3). La somme des

aires décrites dans le temps t sur le plan du couple résultant a, dès lors, pour expression :

$$t\sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

et la somme des aires décrites sur un plan faisant un angle δ avec le plan de ce couple a pour expression :

$$t\cos\delta\sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

plus petite que la précédente. Il existe, dès lors, pour le centre de gravité, ou plus généralement pour chaque centre fixe, un plan à l'égard duquel la valeur de cette somme des aires est plus grande que pour tout autre plan passant par le même point, *et ce plan du maximum des aires* conserve une direction qui ne varie pas avec le temps.

Ces propriétés constituent ce qu'on appelle *le principe des aires.*

Je m'arrêterai ici dans les développements que j'avais à donner sur les principes généraux de la mécanique. Ces principes permettront de mettre en équation bon nombre de problèmes qui peuvent se présenter dans les applications de cette science.

HYDRAULIQUE.

PREMIÈRE SECTION. — PARTIE THÉORIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

HYDROSTATIQUE.

69. *Définitions, propriétés générales des fluides.* — Les solides se définissent, comme nous l'avons vu dans ce qui précède, par l'invariabilité de leur forme; les fluides ne tendent pas, comme eux, à conserver une forme déterminée et invariable, et le *fluide parfait* est celui qui ne résiste à aucun changement de forme ou dont les molécules sont d'une mobilité absolue. Dans un pareil corps, la résistance au mouvement des molécules les unes par rapport aux autres est nulle. Il suit immédiatement de là que, dans un fluide parfait en équilibre, il ne peut se développer aucune composante tangentielle d'actions moléculaires, et toutes ces actions, en un même point de la masse fluide et suivant une direction quelconque, sont normales; d'où résulte nécessairement qu'elles *ont même intensité dans toutes les directions*[1].

C'est cette propriété qui est la base de l'hydrostatique. On classe, d'ailleurs, les fluides en deux groupes :

1° Les fluides incompressibles, qui, sous des pressions énormément différentes, gardent très sensiblement le même volume, ce qui comprend les liquides;

2° Les fluides dits élastiques, qui, au contraire, sous des pressions de plus en plus faibles, tendent à prendre un volume de plus en plus grand, sans changer d'état (du moins, jusqu'à des degrés de raréfaction considérables). Les fluides élastiques eux-mêmes se subdivisent en vapeurs et en gaz, suivant qu'ils peuvent ou non passer à l'état liquide par des variations suffisantes de pression et de température. Ces subdivisions ne sont plus justifiées aujour-

[1] C'est ce qui a été démontré, du reste, à la fin du numéro 24, chapitre Ier de l'introduction.

d'hui, puisque, d'après les belles expériences de MM. Cailletet et Pictet, le dernier des gaz qui avaient résisté, l'hydrogène, a été réduit à l'état liquide. La distinction absolue des fluides élastiques en vapeurs et en gaz ne se justifierait donc plus; mais elle n'en existe pas moins dans les limites usuelles de pression et de température; car il ne faut pas oublier que, pour liquéfier l'oxygène, il a fallu 140° de froid et 320 atmosphères de pression. Il est évident que l'on n'aura jamais affaire à de pareilles données, et, dans les conditions ordinaires de notre monde extérieur, la distinction des fluides élastiques en vapeurs et en gaz peut toujours être conservée. Si, d'un autre côté, on considère que les liquides peuvent être amenés à l'état solide par un abaissement suffisant de la température, on serait conduit à ne plus faire même de distinction entre les solides et les fluides, et l'un ou l'autre état d'un corps dépendrait d'une fonction de la température et de la pression. Nous ne connaissons rien encore de cette loi, si ce n'est qu'elle existe, puisque l'on parvient à réduire des gaz à l'état liquide et même à l'état solide; la fluidité ne serait donc plus qu'un état spécial de tous les corps, et l'expression de gaz permanent n'aurait plus de sens aujourd'hui. Elle n'en restera pas moins pour définir des gaz dont l'état ne peut se modifier que dans des conditions exceptionnelles de température et de pression que l'on ne rencontre jamais dans la pratique. Il en serait de même des définitions des liquides et des solides : chacun de ces états ne serait qu'un état spécial d'un même corps et ne constituerait pas une classe spéciale de corps. L'intelligence de l'homme est si faible, malgré son orgueil, qu'il faut nécessairement qu'elle subdivise pour parvenir à s'expliquer, très imparfaitement le plus souvent, certains phénomènes dont il est témoin tous les jours, et qui font partie certainement d'un ensemble échappant à ses prises. Il faut donc maintenir les définitions des solides et des fluides et même leurs définitions abstraites, si l'on ne veut s'occuper, comme nous devons le faire ici, que d'une théorie restreinte entre ces limites.

La mobilité absolue étant admise pour définir l'état fluide, il en résulte, comme on l'a dit plus haut, que, *en un même point d'une masse fluide en équilibre, les composantes tangentielles des actions moléculaires sont nulles et que les composantes normales ont même intensité dans toutes les directions.* C'est ce que confirme, d'ailleurs, l'expérience. Si dans un vase prismatique renfermant un liquide, on soumet ce liquide à une pression au moyen d'un piston, toutes les parties du vase éprouvent la même pression proportionnellement à leurs surfaces, et cette proportionnalité de la pression aux surfaces entraîne nécessai-

rement, pour un point quelconque de la masse fluide, la condition d'une intensité de pression constante dans toutes les directions de cette masse. C'est Pascal qui a, le premier, énoncé ce principe, et il l'a fait dans ce langage si original qui lui est propre. « Si, dit-il dans son *Traité de l'équilibre des liqueurs*, un vaisseau plein d'eau, clos de toutes parts, a deux ouvertures, dont l'une soit le centuple de l'autre, en mettant à chacune un piston qui lui soit juste, un homme poussant le petit piston égalera la force de cent hommes qui pousseraient celui qui est cent fois plus large et en surmontera quatre-vingt-dix-neuf. Quelque proportion qu'aient ces ouvertures et quelque direction qu'aient les pistons, si les forces qu'on met sur ces pistons sont comme les ouvertures, elles seront en équilibre. »

Dans les fluides élastiques, comme dans les liquides, un pression exercée par une force en un point quelconque de leur surface se transmet dans toute la masse; il en est de même de la pression due à la pesanteur. Mais ici se présente une pression nouvelle due à la force élastique. Cette pression qui s'exerce sur les parois du réservoir contenant le fluide et, par suite, sur le fluide lui-même, est toujours égale à la somme des deux pressions dont il vient d'être question, lorsque le fluide élastique est en équilibre ; car elle tend à écarter les molécules qui composent la masse, tandis que la résultante des deux autres pressions tend, au contraire, à les rapprocher. L'égalité de cette résultante et de la force élastique est donc la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre du fluide.

70. *Équations de l'équilibre.* — Les équations (G), données au numéro 24, chapitre Ier de l'introduction, qui s'appliquent à l'équilibre d'un milieu élastique indéfini, se simplifient beaucoup si l'on adopte la mobilité absolue comme définition des fluides. Cette définition étant admise, il faut, dans les équations (G), annuler les composantes T, et elles deviennent :

$$\frac{dN_1}{dx} + \rho X = 0,$$

$$\frac{dN_2}{dy} + \rho Y = 0,$$

$$\frac{dN_3}{dz} + \rho Z = 0.$$

Si l'on désigne maintenant par p l'intensité de la pression ou la pression sur l'unité de surface, au point (x, y, z) de la masse indéfinie de fluide que nous considérons, les composantes normales N_1, N_2, N_3, qui sont égales entre

elles et qui sont de signe contraire à p, seront sensiblement égales à $-p$; on aura donc

$$N_1 = N_2 = N_3 = -p,$$

et les équations précédentes deviennent :

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \frac{dp}{dx} = \rho X, \\ \frac{dp}{dy} = \rho Y, \\ \frac{dp}{dz} = \rho Z. \end{cases}$$

Ces équations, dans lesquelles il est essentiel de se rappeler que p représente l'intensité de la pression ou la pression sur l'unité de surface au point (x, y, z) de la masse fluide, et X, Y, Z les composantes suivant les trois axes des coordonnées, rapportées à l'unité de masse de la force qui agit sur la molécule placée au point (x, y, z), ρ la densité de masse ou la masse de l'unité de volume du fluide, ces équations, dis-je, sont celles que l'on trouve dans tous les traités de mécanique; elles y sont établies directement, tandis qu'ici nous les déduisons, comme cas particulier, des équations générales relatives à tout milieu élastique.

Les équations (E) s'appliquent à tout fluide parfait dans lequel il ne peut se développer d'actions tangentielles. *En pratique*, elles s'appliquent encore lorsque ces actions tangentielles, *sans être absolument nulles*, sont assez petites pour n'exercer qu'une influence négligeable à une première approximation.

Parmi tous les liquides connus, il n'en existe pas un seul qui soit un fluide parfait et tous ont une certaine tendance à résister aux déformations qui constituent ce qu'on appelle la *viscosité*, et, cependant, un certain nombre des formules usuelles de l'hydraulique sont basées sur la fluidité parfaite. C'est une approximation à laquelle la pratique s'est arrêtée, pour les catégories de faits qui la comportent, parce qu'elle simplifie considérablement les formules et qu'en affectant celles-ci de coefficients déterminés par l'expérience, on arrive à leur faire représenter assez exactement les faits, ce qui est suffisant pour ceux qui appliquent la science sans se préoccuper de sa philosophie. Il faut reconnaître, toutefois, que celle-ci doit, en continuant à progresser et à rechercher des approximations plus grandes que cette première approximation de la fluidité parfaite, rendre de très grands services à la pratique par l'élucidation des lois que cette définition a pour effet de dénaturer, quoique, dans

certains cas, elle suffise pour reproduire à très peu près les résultats de l'expérience. C'est ce qu'on reconnaîtra surtout dans l'hydrodynamique, dont nous aurons à nous occuper plus loin, car la succession plus ou moins rapide des nombreux états moléculaires par lesquels passe tout fluide en mouvement influe considérablement sur les composantes tangentielles des pressions, composantes qu'elle rend sensibles, d'inappréciables qu'elles seraient à l'état de repos, et elle a ainsi pour effet de modifier les résultats d'une manière plus accentuée que cela n'arrive pour le cas de l'équilibre.

71. *Expressions de la pression hydrostatique.* — Si l'on multiplie respectivement par dx, dy, dz, les trois équations (E), qu'on les ajoute membre à membre et que l'on désigne par dp la différentielle totale en (x, y, z) ayant pour expression :

$$\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz,$$

il viendra

$$\text{(F)} \qquad dp=\rho\,(\mathrm{X}\,dx+\mathrm{Y}\,dy+\mathrm{Z}\,dz).$$

Cette équation renferme toute l'hydrostatique, et il convient de nous y arrêter pour en déduire les principales conséquences qu'elle comporte.

On voit d'abord qu'il faut, pour que l'équilibre qu'exprime l'équation (F) ait effectivement lieu, que son second membre soit une différentielle exacte, de sorte que, si l'on désigne par $\mathrm{F}\,(x, y, z)$ son intégrale, on aura

$$p=\mathrm{F}\,(x, y, z)+c,$$

c étant une constante arbitraire, qui se déterminera par une valeur p_0 connue de l'intensité de la pression pour un point (x_0, y_0, z_0) de la masse fluide. Il suit de là que, connaissant la pression en un point déterminé (x_0, y_0, z_0) de la masse, on pourra en déduire immédiatement la pression en un point quelconque (x, y, z) de cette masse, et dans toutes les directions autour de ce point.

72. *Surfaces de niveau.* — Si l'on pose

$$\text{(G)} \qquad \rho\,(\mathrm{X}\,dx+\mathrm{Y}\,dy+\mathrm{Z}\,dz)=0,$$

l'équation (F) devient

$$dp=0;$$

c'est-à-dire que l'intensité de la pression est constante sur toutes les surfaces dont (G) est l'équation différentielle. Cette équation donne ce qu'on appelle les *surfaces de niveau*.

Si l'on divise l'équation (G) par la densité ρ, qui n'est jamais nulle, elle devient

$$\text{(H)} \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Si l'on désigne par F la force dont X, Y, Z sont les composantes rectangulaires, et par ds un élément linéaire quelconque compté sur la surface, au point d'application de la force, les cosinus des angles que ces composantes font avec l'élément ds ont pour expressions $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; le cosinus de l'angle de l'élément ds avec la direction de la force aura pour expression la suivante (et cette expression résulte immédiatement de ce principe de statique, démontré au chapitre Ier de l'introduction, que la projection de la résultante sur une droite quelconque est égale à la somme des projections des composantes sur la même droite) :

$$\cos(F\,ds) = \frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{F\,ds}.$$

Ce cosinus étant nul en vertu de l'équation (H), il s'ensuit que la force F est normale à la surface que cette équation représente.

Réciproquement, si la force est constamment normale à la surface, celle-ci est une surface de niveau. On a, en effet, dans ce cas

$$\cos(F\,ds) = 0;$$

d'où, par l'expression précédente,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0;$$

d'où, en vertu de l'équation (F),

$$dp = 0,$$

condition qui caractérise ce genre de surfaces.

Lorsque les forces extérieures X, Y, Z admettent un potentiel, c'est-à-dire sont les dérivées d'une fonction Φ de x, y, z, comme cela arrive par exemple pour la pesanteur, l'équation (F) peut s'écrire

$$dp = \rho\,d\Phi$$

ou

$$\rho = \frac{dp}{d\Phi}.$$

Or les surfaces de niveau, $\Phi =$ constante, étant aussi des surfaces d'égale pression, $p =$ constante, les accroissements dp et $d\Phi$ qu'éprouvent p et Φ au passage d'une surface de niveau à la suivante sont constants, quel que soit le point (x, y, z) où l'on se trouve sur la première surface. Donc la densité ρ, égale à $\frac{dp}{d\Phi}$, est elle-même constante sur toute l'étendue de chaque surface de niveau. Il suit de là, en particulier, que la surface libre d'un liquide ne pourra jamais être coupée par une surface de niveau, puisque celle-ci devrait alors avoir une partie dans l'intérieur du fluide, et où la densité serait beaucoup plus forte que dans l'autre partie, extérieure, où la surface de niveau se trouverait dans l'air ou dans le vide. *La surface libre coïncidera donc toujours avec une surface de niveau.*

73. *Autres conséquences à tirer de l'équation hydrostatique.* — L'équation (F) du numéro 71 conduit, en indiquant l'intégration, à la suivante :

$$p = \int \rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + \text{const.}$$

Cette expression montre que, si l'on part d'un point (x_0, y_0, z_0) de la surface libre pour laquelle la pression est nulle, en faisant abstraction de la pression atmosphérique supposée constante, pour arriver à un point quelconque (x, y, z) de la masse fluide, la valeur de l'intégrale reste la même, quelle que soit la voie cinématique suivie entre ces deux points; d'où résulte que la fonction $\rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ ne peut être qu'une différentielle complète d'une fonction de x, y, z, ce qui, ainsi qu'on le démontre dans le calcul différentiel, entraîne les équations de condition :

$$\frac{d(\rho X)}{dy} = \frac{d(\rho Y)}{dx},$$
$$\frac{d(\rho X)}{dz} = \frac{d(\rho Z)}{dx},$$
$$\frac{d(\rho Y)}{dz} = \frac{d(\rho Z)}{dy}.$$

Les forces (X, Y, Z) devront donc, lorsque la valeur de ρ ne sera pas constante, satisfaire à ces conditions dans toute l'étendue de la masse fluide pour qu'il y ait équilibre.

Lorsque la densité est constante, ces conditions se réduisent aux suivantes :

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{dy}=\dfrac{dY}{dx}, \\ \dfrac{dX}{dz}=\dfrac{dZ}{dx}, \\ \dfrac{dY}{dz}=\dfrac{dZ}{dy}. \end{cases}$$

Il faut faire remarquer ici que la pesanteur, au moins à la surface de la terre et dans le voisinage, satisfait à ces conditions, attendu qu'elles seront remplies chaque fois que les forces peuvent être censées émaner de centres fixes, et sont fonctions des distances des molécules à ces centres. $F(x, y, z)$ étant alors l'expression de l'intégrale de la fonction $\rho(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$, on aura, comme on l'a déjà vu au numéro 71 :

$$p=F(x,y,z)+\text{const.};$$

et la constante ne peut se déterminer qu'à condition de connaître la pression sur un point déterminé ; de sorte que, si p_0 est l'intensité connue de la pression au point (x_0, y_0, z_0), on aura

$$p=p_0+F(x,y,z)-F(x_0,y_0,z_0).$$

Cette même formule donnerait aussi la pression exercée contre la paroi d'un vase dans lequel le fluide serait renfermé et dont la résistance détruirait cette pression.

74. *Cas d'un potentiel.* — Lorsque la fonction des forces $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ est la différentielle complète d'une fonction Φ de x, y, z, ou, en d'autres termes, qu'il y a *un potentiel*, on aura

$$d\Phi=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz;$$

d'où, par l'équation F du numéro 71,

$$(\mathrm{F}')\qquad dp=\rho\,d\Phi;$$

d'où, en intégrant,

$$(\mathrm{K})\qquad p=\int\rho\,d\Phi+\text{const.}$$

Il est nécessaire, pour que l'équilibre subsiste, que $\rho\,d\Phi$ soit une différentielle

exacte d'une certaine fonction de x, y, z, ainsi qu'on l'a fait remarquer déjà au numéro 71, ce qui ne peut arriver que si ρ est fonction de Φ. D'où résulte, par l'équation (K), que p sera fonction de ρ et que la pression et la densité varieront ou seront constantes ensemble, quand on passera d'un point à un autre du fluide. Il suit de là que la densité devra être constante en même temps que la pression sur toutes les surfaces de niveau; d'où résulte que, si toutes les parties de la masse fluide n'ont pas la même densité, elles doivent, en se mettant en équilibre sous l'action des forces sollicitant la masse, se disposer de manière que les parties de densités différentes forment des couches séparées par des surfaces de niveau.

S'il s'agissait d'un fluide élastique homogène, dans lequel la densité fût proportionnelle à la pression, comme cela arrive pour les gaz parfaits, la loi suivant laquelle varierait la densité d'une couche à l'autre se déterminerait facilement. Il suffirait, en effet, de poser

$$p = \mathrm{K}\rho,$$

K étant une constante; l'équation (F') deviendrait, dans ce cas,

$$\mathrm{K}\frac{dp}{p} = d\Phi;$$

d'où, en intégrant,

$$p = \mathrm{M}e^{\frac{\Phi}{\mathrm{K}}},$$

M étant une constante arbitraire, e la base des logarithmes népériens égale à 2,718282.

On déduirait facilement de ces relations la loi de la densité :

$$\rho = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{K}} e^{\frac{\Phi}{\mathrm{K}}},$$

Il faut bien remarquer, d'ailleurs, que la densité dans les fluides élastiques ne peut être proportionnelle à la pression que si la température reste constante. La densité est donc en général fonction de la pression et de la température. Mais pour que l'équilibre soit effectivement possible, il faut que, dans l'équation (F'), le second membre soit une différentielle exacte, ce qui exige que ρ soit fonction de Φ. L'intégrale de cette équation donnerait la loi des pressions, d'où l'on conclurait celle des densités, ρ étant fonction de Φ. Mais ρ étant fonction de la température, comme on l'a dit tout à l'heure, il en sera

de même de p. La pression et la température varieront donc nécessairement ensemble ou seront constantes ensemble ; d'où résulte que, *dans tout fluide élastique, l'équilibre ne peut avoir lieu que si la température est constante sur tous les points de ses surfaces de niveau.*

Cette proposition s'applique d'ailleurs aux liquides, même à ceux qui sont regardés comme incompressibles. Il est établi, en effet, que leur densité varie et avec la pression et avec la température, quoique dans des limites très restreintes par rapport à celles qui s'appliquent aux fluides élastiques. Chacun peut constater, en effet, les mouvements que prennent différentes parties d'une masse d'eau renfermée dans un vase par suite d'une inégale distribution de chaleur entre elles, et l'équilibre ne devient réellement stable que lorsque la température a pris une valeur moyenne, constante pour toute la masse.

Il suit de là que, si, lorsqu'on n'étudie la mécanique qu'au point de vue abstrait du jeu des forces, on peut faire abstraction de la température, cela n'est plus possible lorsqu'on en vient à ses applications; et si l'on ne veut pas faire entrer dans les calculs cet élément, qui les compliquerait encore, il faut supposer que la température reste constante, ou du moins fonction de la pression, pendant toute la durée des phénomènes que l'on a à analyser. Sans des restrictions analogues, il est bien peu de formules de la mécanique rationnelle qui fussent applicables à la pratique. *Pour simplifier, et dans tout ce qui va suivre, on supposera constante la température du milieu.* C'est un point qu'il ne faut pas perdre de vue.

75. *Application à un fluide pesant homogène et incompressible.* — Si l'on veut appliquer les principes qui viennent d'être exposés à l'hydraulique, il faut s'occuper de l'eau, son principal objectif. L'eau est un fluide homogène et que l'on peut regarder comme incompressible [1]. Sa densité varie avec la température, mais dans des limites assez étroites pour qu'on puisse la regarder comme constante. Ainsi le poids du mètre cube d'eau distillée, qui est de 1000 kilogrammes à la température de 4° au-dessus de zéro, va en diminuant d'abord très lentement jusqu'à 10°, où il est de $999^k,72$, puis plus rapidement à mesure que la température augmente, et il n'est plus que de 957 kilogrammes à la température de 100°, où l'eau entre en ébullition. Par

[1] Excepté dans la question des ondes sonores propagées par ce liquide, cas où les condensations ou dilatations cubiques successives sont comparables aux contractions ou dilatations linéaires corrélatives éprouvées dans divers sens; en sorte que l'on ne peut pas les négliger en comparaison de celles-ci, comme il serait permis de le faire dans toute autre catégorie de phénomènes.

un phénomène qui ne se présente que pour certains corps et seulement au moment où ils vont changer d'état physique, le poids d'un mètre cube va, d'ailleurs, à partir de la température de 4° au-dessus de zéro, en diminuant à mesure que la température baisse, et, à zéro, c'est-à-dire à la température de la glace fondante, le poids du mètre cube n'est plus que de 930 kilogrammes. On voit donc que l'eau prend un maximum de densité à la température de 4°, à partir de laquelle sa densité va en diminuant, que la température augmente ou diminue. On peut, sans erreur sensible, supposer cette densité constante, et le poids du mètre cube égal à 1000 kilogrammes entre les limites de température que l'on rencontre dans nos régions, puisque entre 4° et 30° au-dessus de zéro ce poids ne varie que de 1000 kilogrammes à $995^k,73$, et que pour la température moyenne de 10° il est de $999^k,72$.

La densité de l'eau varie aussi légèrement avec la pression. Ainsi, dans une colonne d'eau de 100 mètres de hauteur, soit de près de 10 atmosphères, le poids du mètre cube, étant de 1000 kilogrammes à la partie supérieure de la colonne, serait de $1000^k,44$ à la partie inférieure. L'eau se comprimerait donc des 0,000046 de son volume sous la pression d'une atmosphère. Ce résultat montre que, dans les circonstances ordinaires, on peut, sans erreur appréciable, regarder l'eau comme incompressible.

En résumé, dans les applications de la mécanique à l'hydraulique, on peut regarder l'eau comme un fluide homogène absolument incompressible pesant 1000 kilogrammes par mètre cube, sans s'exposer à commettre d'erreurs dans l'application des formules établies sur ces données.

Considérons donc une masse d'eau soumise uniquement à l'action de la pesanteur, et comptons les z positifs de haut en bas dans le sens de cette force. Il faudra, dans l'équation (F) du numéro 71, faire

$$X = 0,$$
$$Y = 0,$$
$$Z = g,$$

et elle deviendra

$$dp = \rho g\, dz;$$

ou, si l'on désigne par π le poids de l'unité de volume,

$$dp = \pi\, dz;$$

d'où l'on déduit, par l'intégration,

$$p = p_0 + \pi(z - z_0); \tag{h}$$

p_0 étant la pression qui correspond à la valeur z_0 de z. Cette expression est celle de l'intensité de la pression hydrostatique sur un plan de niveau qui serait à la hauteur $z-z_0$ au-dessous du plan du niveau supérieur.

Si l'on supposait $z_0=0$, ce qui reviendrait à prendre ce dernier plan pour plan des x, y, et que l'on supposât en même temps $p_0=0$, la formule (h) donnerait

$$p=\pi z.$$

Il résulte de cette relation que, *dans les divers points de la masse fluide, l'intensité de la pression est proportionnelle aux profondeurs de ces points au-dessous de la surface libre ou surface supérieure de niveau, et elle est pour chacun de ces points représentée par un prisme ayant l'unité de surface pour base et pour hauteur la profondeur à laquelle le point se trouve au-dessous du niveau supérieur.* L'équation (h) montre d'ailleurs que l'intensité p_0 de la pression sur la surface libre se transmet intégralement à tous les points de la masse fluide.

L'équation (G) des surfaces de niveau du numéro 72 devient pour $z_0=0$, $p_0=0$:

$$\pi\, dz=0,$$

d'où

$$z=\frac{a}{\pi},$$

a étant une constante arbitraire. Cette équation donne une famille de plans parallèles au plan horizontal des xy; les surfaces de niveau sont donc des plans horizontaux. Ils sont normaux à la direction de la force, qui est ici la pesanteur, et, réciproquement, tout plan normal à cette direction est une surface de niveau.

Il est facile de s'assurer que ces déductions analytiques sont absolument d'accord avec les résultats de l'observation; ainsi, chacun peut constater que, si une masse d'eau est entrée dans un réservoir et qu'on ferme la prise d'eau, la surface libre de la masse liquide ne tarde pas à devenir horizontale. L'expérience montre encore que, si l'on met dans un vase un mélange de liquides de densités diverses, ceux-ci ne tardent pas à se séparer les uns des autres et à se disposer suivant leurs densités, par couches séparées par des plans horizontaux très nettement accusés, et l'équilibre devient stable dès que ces plans se sont établis.

L'analyse conduisant à cette propriété que sanctionne si complètement l'expérience, on est en droit d'en conclure que l'hypothèse de la mobilité absolue, qui a servi de base à cette analyse, peut parfaitement être admise lorsqu'il

s'agit de l'équilibre des liquides, ou au moins qu'elle conduit à une première approximation dont on doit absolument se contenter, puisqu'elle suffit à expliquer les faits observés, sans rien modifier à leurs lois telles que l'expérience les établit.

Il suit de là que l'hypothèse de la mobilité absolue ou de l'absence de frottements intérieurs peut être admise sans hésitation dans l'hydrostatique, et l'équation (F) du numéro 71 doit bien, dès lors, être regardée comme étant la base de cette partie de la mécanique où le calcul donne des résultats en parfait accord avec l'expérience.

76. *Mesure des pressions.* — L'équation (h) du numéro 75 peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{p}{\pi}-\frac{p_0}{\pi}=z-z_0,$$

et, si l'on fait

$$z-z_0=\zeta,$$

$$\frac{p}{\pi}-\frac{p_0}{\pi}=\zeta;$$

$\frac{p}{\pi}$, $\frac{p_0}{\pi}$ représentent des hauteurs, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte, ce qui est du reste nécessaire pour que l'équation précédente soit homogène; ζ représente la différence de niveau de deux plans horizontaux situés aux profondeurs z et z_0 au-dessous du plan horizontal des xy; p représente la pression sur l'unité de surface exprimée en kilogrammes; π est le poids de l'unité de volume exprimé aussi en kilogrammes, et dès lors $\frac{p}{\pi}$ est la hauteur d'une colonne d'eau dont p serait le poids et qui aurait l'unité de surface pour base; l'équation qui précède conduit dès lors à l'énoncé du principe suivant :

La différence des hauteurs représentatives des pressions sur deux sections horizontales d'un fluide homogène et incompressible pesant en équilibre est égale à la différence de niveau de ces deux plans; d'où résulte immédiatement cette autre proposition que *la différence des hauteurs représentatives des pressions sur deux points pris dans la masse fluide est égale à la différence des profondeurs de ces points au-dessous de la surface libre.*

Les hauteurs $\frac{p}{\pi}$ peuvent s'exprimer en atmosphères, si l'on remarque que la hauteur d'eau qui représente une atmosphère est de $10^m,33$. Si donc p_a représente l'intensité de la pression atmosphérique, on aura

$$\frac{p_a}{\pi}=10,33;$$

si p représente l'intensité d'une pression, h sa hauteur représentative, on aura

$$\frac{p}{\pi} = h;$$

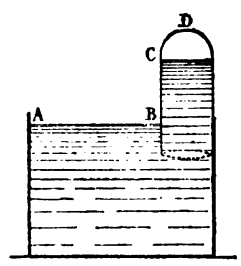
et, si l'on prend l'atmosphère pour unité, on aura

$$\frac{p}{\pi} = \frac{h}{10,33}.$$

77. *Vases communiquants.* — Si plusieurs vases communiquent entre eux par des tubes inférieurs, un liquide ne pourra se tenir en équilibre dans ce système que s'il s'élève au même niveau dans tous les vases. C'est ce principe qui a conduit à l'instrument connu sous le nom de *niveau d'eau.*

Si le vase dans lequel le liquide se tient au niveau AB (fig. 19) sous une pression constante p_a, comme le serait la pression atmosphérique, au moins pendant un certain intervalle de temps, est en communication avec un tube BD, dans lequel on ait fait le vide, le liquide s'élèvera dans le tube à une hauteur CB égale à $\frac{p_a}{\pi}$, qui pourrait dès lors servir de mesure à la pression p_a. C'est sur ce principe qu'est fondé *le baromètre.*

Fig. 19.



Si la hauteur BD du tube était plus petite que $\frac{p_a}{\pi}$, le fluide exercerait sur le sommet D du tube une pression exprimée par $p_a - \pi\zeta$, ζ désignant la hauteur BD.

78. *Cas des liquides de densités différentes.* — Lorsqu'on a un système composé de liquides pesants de densités différentes, on sait, d'après ce qui a déjà été dit, qu'ils se disposent par couches séparées entre elles par des plans horizontaux, le liquide le plus dense occupant le fond du vase, et le moins dense sa partie supérieure. Dans un pareil système, la pression se calculerait, de couche en couche, en supposant toujours la densité de chacun des liquides constante. Ainsi a_1 désignant la hauteur verticale ou l'épaisseur de la couche supérieure, a_2 celle de la suivante.....
.....a_n celle de la n^{me}, si ζ_n désigne, pour le point dont on veut calculer la pression, la profondeur au-dessous de la surface de niveau qui sépare la n^{me} couche de la $(n-1)^{me}$, p_n l'intensité de la pression en ce point, $\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_n$ les poids de l'unité de volume des divers liquides, p_0 la pression initiale

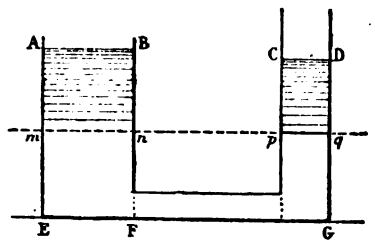
sur la surface libre de la couche supérieure, il est facile de voir que l'on aura

$$p_n = p_0 + \pi_1 a_1 + \pi_2 a_2 \cdots\cdots + \pi_n \zeta_n. \tag{i}$$

C'est cette équation qui servira à calculer la pression dans le système qui nous occupe.

Supposons maintenant (fig. 20) qu'un système composé d'un vase ABEF, ouvert par le haut, communiquant par un tube FG avec un autre vase CDG, également ouvert par le haut, contienne deux liquides de densités différentes. Soit pq le plan horizontal qui séparera les deux liquides lorsqu'ils seront en équilibre, et appelons ζ_1 la hauteur Am de la surface libre AB dans le premier vase au-dessus du plan horizontal pq, ζ_2 la hauteur Cp au-dessus du même plan de la surface libre CD, dans le second vase, π_1 et π_2 désignant les poids de l'unité de volume des deux liquides. Ces deux surfaces libres AB, CD étant soumises à la même pression atmosphérique, l'équilibre du système ne pourra subsister que si l'on a

Fig. 20.



$$\pi_1 \zeta_1 = \pi_2 \zeta_2,$$

équation qui exprime que la pression sur la surface séparative pq des deux liquides est constante. Cette relation conduirait, puisque l'on a $\pi_1 = \rho_1 g$, $\pi_2 = \rho_2 g$, à la suivante :

$$\rho_1 \zeta_1 = \rho_2 \zeta_2;$$

d'où résulte que *les hauteurs au-dessus de leur surface séparative de niveau auxquelles s'élèveront dans deux vases communiquants deux liquides de densités différentes sont en raison inverse de leurs densités.*

Ce principe est encore vérifié par l'expérience, et si l'on prend un tube recourbé et que l'on verse du mercure dans l'une de ses branches et de l'eau dans l'autre, on constate que, l'équilibre une fois établi, l'eau s'élève 13,60 fois plus haut que le mercure au-dessus du plan horizontal qui les sépare, c'est-à-dire exactement dans le rapport inverse de leurs densités, puisqu'on sait que le mercure pèse, à égalité de volume, 13,60 fois plus que l'eau.

On remarquera, d'ailleurs, que le principe énoncé tout à l'heure est indé-

pendant des dimensions des vases communiquants, de sorte que l'on peut, par application de ce principe, faire équilibre à une masse considérable de fluide, contenue dans un réservoir de grandes dimensions, au moyen d'une masse relativement petite d'un autre fluide, contenue dans un vase de très petites dimensions par rapport à celles du réservoir avec lequel il serait en communication; on conçoit de plus que l'on puisse remplacer, dans les deux vases, une partie du fluide par un piston sur lequel on exercerait une certaine pression, ce qui conduit à l'idée de la *presse hydraulique* inventée par Pascal et explique, en même temps, les puissants effets que l'on peut tirer de cette machine.

Si le fluide contenu dans le grand réservoir était un fluide élastique, un gaz par exemple, et que le liquide contenu dans le vase communiquant avec le réservoir fût très dense, comme le mercure par exemple, les petites variations de hauteur dans le tube ou vase communiquant indiqueraient les variations de la pression dans le réservoir; car la pression à la surface séparative des deux fluides, devant, dans l'état d'équilibre, demeurer constante, d'après ce qui a été établi plus haut, est nécessairement proportionnelle à la hauteur à laquelle le mercure s'élèvera au-dessus de la surface séparative de niveau des deux fluides. C'est sur ce principe qu'est fondé le *manomètre*, qu'on emploie dans les gazomètres et les machines à vapeur pour mesurer les pressions dont on peut à chaque instant disposer dans le service de ces appareils.

79. *Pressions des fluides pesants en équilibre sur des parois solides. — Centre de pression.* — Considérons un fluide pesant qui, étant en équilibre, a pour surface libre un plan horizontal, et prenons ce plan pour plan des xy, les z perpendiculaires à ce plan étant comptés de haut en bas, c'est-à-dire dans le sens de la pesanteur. Ce fluide s'appuie sur une surface donnée et nous voulons déterminer la pression qu'il exerce sur cette surface.

Si l'on considère un élément plan ϖ de la surface situé à la distance z au-dessous du plan des xy, et dont la normale fasse avec les axes des x, y, z des angles dont les cosinus seraient l, m, n, la pression sur cet élément vaudra $\varpi.\pi z$, et ses composantes suivant les trois axes vaudraient $\varpi n.\pi z$, $\varpi m.\pi z$, $\varpi l.\pi z$. Mais ϖn, ϖm, ϖl sont les projections de l'élément ϖ sur les plans des yz, des xz et des xy; d'où résulte que *les composantes de la pression sur l'aire ϖ sont à cette pression comme les projections de l'aire sont à cette aire.* La résultante partielle des composantes $\varpi n.\pi z$ et $\varpi m.\pi z$, suivant les x et les y, est donc égale en grandeur et en direction à ce qu'elle serait pour les projections de la sur-

face donnée sur les plans des yz et des xz, et la résultante partielle des composantes $\varpi l . \pi z$, suivant les z, n'est autre chose que le poids du fluide compris entre la surface donnée, le plan des xy et le cylindre vertical projetant sur ce même plan le contour de cette surface. Cette dernière résultante passe, d'ailleurs, évidemment par le centre de gravité de la masse fluide comprise entre ces limites.

La question se ramène, dès lors, à calculer les pressions sur une aire donnée dans un plan vertical et le poids d'une colonne de fluide dont le volume est déterminé. Ce dernier calcul n'offrant aucune difficulté, il ne reste à indiquer que celui des pressions sur l'aire située dans un plan vertical que nous prendrons pour le plan des xz. Si nous désignons par p l'intensité de la pression ou la pression sur l'unité de surface, la pression sur l'élément $dx\,dz$ vaudra $p\,dx\,dz$, et la pression P_2 sur la surface donnée sera $P_2 = \int\int p\,dx\,dz$, les intégrales étant prises entre les limites des valeurs de x et z qui conviennent à la surface donnée. La surface étant plane, toutes les pressions élémentaires normales à cette surface auront des directions parallèles; il y aura donc un centre de forces parallèles, qu'on appelle *centre de pression*, et dont les coordonnées x_2, z_2 dans le plan des xz auront, d'après ce qu'on a vu au numéro 15, les valeurs suivantes :

$$(C_3) \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{\int\int p\,dx\,dz\,x}{\int\int p\,dx\,dz}, \\[2ex] z_2 = \dfrac{\int\int p\,dx\,dz\,z}{\int\int p\,dx\,dz}. \end{cases}$$

On a, d'ailleurs, $P_2 = \int\int p\,dx\,dz$.

Faisons abstraction de la pression atmosphérique sur la surface libre, ce qui est permis ici, puisque dans la pratique les parois des vases sont aussi soumises extérieurement à cette pression. Or on a vu au numéro 75 que l'intensité p_a de la pression sur la surface libre du fluide se transmettait intégralement sur tous les points de la masse. L'atmosphère donnera lieu, dès lors, sur toute la partie intérieure de la surface en contact avec le fluide, à des actions qui seront détruites par des actions égales et contraires que cette même atmosphère exercera sur la partie extérieure de la surface.

En négligeant la pression atmosphérique, on a, d'après ce qu'on a vu au numéro 75,

$$p = \pi z.$$

d'où, par les formules (C_3) du numéro 77 et avec cette valeur de p,

$$(C_3') \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{\iint \pi\, x dx\, z\, dz}{\iint \pi\, dx\, z dz}, \\ z_2 = \dfrac{\iint \pi\, dx\, z^2\, dz}{\iint \pi\, dx\, z\, dz}, \\ P_2 = \iint \pi\, dx\, z\, dz. \end{cases}$$

Si la densité est constante, π est aussi constant, et ces expressions deviennent :

$$(C_3'') \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{\iint x\, dx\, z dz}{\iint dx\, z\, dz}, \\ z_2 = \dfrac{\iint dx\, z^2\, dz}{\iint dx\, z\, dz}, \\ P_2 = \pi \iint dx\, z\, dz. \end{cases}$$

Les expressions des coordonnées x_1, z_1 du centre de gravité de la surface sont, dans le cas de la densité constante qui nous occupe, données par les formules (C_1''') du numéro 21 :

$$x_1 = \frac{\iint x\, dx\, dz}{\iint dx\, dz},$$

$$z_1 = \frac{\iint z\, dz\, dx}{\iint dx\, dz};$$

si l'on désigne par A l'aire totale de la surface, la dernière de ces expressions peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$z_1 = \frac{\iint z\, dz\, dx}{A};$$

d'où l'on tire

$$\iint z\, dz\, dx = Az_1,$$

et, si l'on substitue cette valeur de $\iint z\, dz\, dx$ dans l'expression de P_2, celle-ci devient

$$P_2 = \pi A z_1.$$

La résultante totale des pressions sur une surface plane verticale est donc égale au

poids d'un volume prismatique de liquide ayant l'aire de la surface pour base ou pour section normale et pour hauteur la distance du centre de gravité de cette surface à la surface libre du liquide. Si la surface plane était inclinée, au lieu d'être verticale, cette proposition n'en serait pas moins vraie. On pourrait, en effet, toujours choisir l'axe des x de manière qu'il coïncidât avec l'intersection du plan de la surface et du plan horizontal des xy, et si l'on désigne par δ l'angle de ces deux plans, l'expression de la résultante totale des pressions P_2 devient

$$P_2 = \pi \iint \frac{dx\, z\, dz}{\sin \delta}.$$

D'un autre côté, l'ordonnée z_1 du centre de gravité aurait pour expression :

$$z_1 = \frac{\iint dx\, z\, dz}{A \sin \delta};$$

d'où l'on tirerait

$$\iint dx\, z\, dz = A z_1 \sin \delta;$$

ce qui transforme l'expression de P_2 donnée ci-dessus dans la suivante :

$$P_2 = \pi A z_1,$$

expression identique avec celle qui a été trouvée plus haut pour le cas où la surface donnée est dans un plan vertical.

On voit d'après cela que *la grandeur de la résultante totale des pressions sur une surface plane donnée est absolument indépendante de l'inclinaison de la surface.*

Si la surface plane était horizontale, elle resterait à une hauteur constante H au-dessous de la surface libre ou du plan des xy, auquel elle serait parallèle, et les expressions de x_2, y_2, P_2 deviennent :

$$(C_3''') \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{\iint px\, dx\, dy}{\iint p\, dx\, dy}, \\ y_2 = \dfrac{\iint p dx\, y\, dy}{\iint p dx\, dy}, \\ P_2 = \iint p\, dx\, dy. \end{cases}$$

Mais on a ici

$$p = \pi H;$$

d'où l'on déduit, A désignant toujours l'aire de la surface,

$$P_2 = \pi AH,$$

$$x_2 = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy},$$

$$y_2 = \frac{\iint y.dy\,dx}{\iint dx\,dy}.$$

Ces valeurs de x_2, y_2 sont identiques avec celles qui sont données par les expressions (C'_1) du numéro 15 déterminant les coordonnées du centre de gravité; car celles-ci deviennent, si ρ est constant, cas qui nous occupe ici :

$$x_1 = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy},$$

$$y_1 = \frac{\iint y\,dy\,dx}{\iint dx\,dy}.$$

Il suit de là que, *lorsque la surface donnée est horizontale, le centre de pression coïncide avec le centre de gravité de la surface,* ce qui est, du reste, facile à établir *a priori*, puisque la résultante des pressions n'est autre chose, dans ce cas, que le poids de la colonne liquide ayant la surface donnée pour base et pour hauteur la différence de niveau entre cette surface et la surface libre.

80. *Application à un exemple.* — Appliquons ce qui vient d'être dit à un exemple et prenons le rectangle, qui est la surface qui se présente le plus souvent dans la pratique, notamment dans les calculs de résistance des portes d'écluses.

Soient a et b les longueurs des côtés du rectangle vertical. Nous prendrons son plan pour plan des zx et sa base a pour axe des x, l'une des extrémités de cette base étant prise pour origine, de sorte que la perpendiculaire à la base, en ce point, coïncide avec l'axe des z dirigé toujours de haut en bas, comme on l'a admis dans le numéro précédent; les deux côtés du rectangle sont donc dirigés suivant les axes des x et des z.

La forme rectangulaire est, comme je l'ai indiqué, celle des portes d'écluses. C'est aussi celle que l'on adopte pour les vannes, et, pour celles qui ont d'assez grandes charges d'eau, il est très important de connaître leur centre de pression, afin de leur donner la solidité nécessaire.

Les formules à appliquer dans le cas du rectangle qui nous occupe sont les formules (C''_3) :

$$x_2 = \frac{\iint x\,dx\,z\,dz}{\iint dx\,z\,dz},$$

$$y_2 = \frac{\iint x\,dx\,z^2\,dz}{\iint dx\,z\,dz},$$

$$P_2 = \pi \iint dx\,z dz,$$

qui, en tenant compte de la forme de la surface et de ses limites, deviennent:

$$x_2 = \frac{\int_0^a x\,dx \int_0^b z\,dz}{\int_0^a dx \int_0^b z\,dz} = \frac{a}{2},$$

$$y_2 = \frac{\int_0^a dx \int_0^b z^2\,dz}{\int_0^a dx \int_0^b z dz} = \frac{2}{3}b,$$

$$P_2 = \pi \int_0^a dx \int_0^b z\,dz = \pi\,ab \cdot \frac{b}{2} = \pi\,A \cdot \frac{b}{2} = \pi\,Az_1.$$

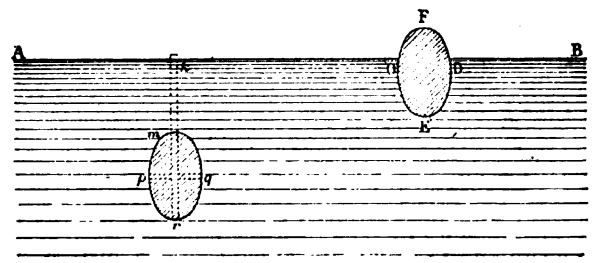
Le centre de pression est donc situé sur la verticale élevée sur le milieu de la base supérieure du rectangle et aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur au-dessous de cette base, soit au $\frac{1}{3}$ de la hauteur au-dessus de la base inférieure, et la résultante des pressions est bien égale au poids d'un volume d'eau ayant le rectangle pour base et dont la hauteur serait $\frac{b}{2}$ ou la hauteur du centre de gravité de ce rectangle au-dessous de la surface libre ou du plan des xy.

81. *Équilibre d'un solide dans un milieu fluide.* — Considérons un corps solide immergé dans un fluide en équilibre et bornons-nous, d'ailleurs, au cas d'un fluide incompressible pesant comme l'eau.

Le liquide étant en équilibre, sa surface libre sera, comme on l'a vu au numéro 75, un plan horizontal AB (fig. 21). Supposons d'abord que le solide $mprq$ soit entièrement immergé, les forces qui agissent sur lui sont, d'un côté, la pesanteur, et, de l'autre, les pressions que ce fluide exerce normalement à sa surface. La résultante des actions élémentaires de la pesanteur n'est autre chose que le poids total du solide immergé, et cette force est dirigée suivant la verticale passant par le centre de gravité du corps. Quant aux pressions élémentaires du corps, il est facile de voir que toutes leurs composantes horizon-

tales donnent une résultante nulle ; car, quel que soit le plan vertical que l'on choisisse pour y projeter la surface du corps, il y aura toujours deux parties de cette surface qui se projetteront l'une sur l'autre et auxquelles correspondront des pressions dirigées en sens contraire, et qui seront, d'ailleurs, d'égale intensité pour toute tranche élémentaire horizontale pq du solide, puisque la profondeur de toute cette tranche au-dessous du plan des xy est constante. La résultante de toutes les composantes horizontales des pressions élémentaires est donc nécessairement nulle. Ceci démontré, il ne reste plus que la résultante des composantes élémentaires verticales, qui est elle-même verticale et qui agit de bas en haut. Il est évident, en effet, que deux éléments m et r de la surface qui se projettent l'un sur l'autre en k (fig. 21) sur le plan des xy donnent lieu, en conservant les notations adoptées plus haut, à deux pressions de sens contraire valant, l'une $\varpi n \pi \times km$ et agissant de haut en bas, l'autre $\varpi n \pi \times kr$ et agissant de bas en haut, ce qui donne une résultante partielle valant $\varpi n \pi (kr - km)$ ou le poids du filet fluide ayant mr pour hauteur, et capable de faire justement équilibre à ce poids. La résultante totale de toutes les composantes verticales de la pression a donc pour valeur le poids d'un volume de fluide égal à celui du solide immergé, et elle fait équilibre à ce poids; c'est-à-dire passe par le centre de gravité du volume immergé. Les conditions d'équilibre sont donc les suivantes :

Fig. 21.



Il faut, quand le corps n'est retenu dans le fluide par aucun lien ou par aucune force spéciale, que le poids de ce corps soit égal au poids du volume de fluide dont il tient la place, et que son centre de gravité et celui de ce volume de fluide soient situés sur la même verticale.

La première de ces deux conditions se traduit par l'équation :

$$\pi w = \pi' w;$$

w étant le volume du solide et celui du fluide dont il occupe la place, π le poids spécifique du solide, π' celui du fluide. On déduit de cette relation qu'un corps solide pesant ne peut se tenir en équilibre dans un fluide incompressible pesant que si le corps et le fluide ont même poids spécifique ou même densité, puisque $\pi = \rho g$, $\pi' = \rho' g$, d'où $\rho = \rho'$.

Si le poids du corps est moindre ou plus grand que celui du fluide déplacé, le corps tendra à monter ou à descendre en vertu d'une force égale à la différence des deux poids, les deux centres de gravité restant d'ailleurs toujours situés sur la même verticale, qui est la direction de cette force, et le centre de gravité du corps demeurant au-dessous de celui du volume du fluide déplacé.

Les conditions qui viennent d'être indiquées constituent le *principe d'Archimède*, très faussement interprété lorsqu'on le fait consister dans une perte de poids du corps immergé; celui-ci ne perd absolument rien de son poids, mais il faut, pour qu'il y ait équilibre, que ce poids soit égal à celui du volume de fluide dont le corps tient la place.

Si le corps émergeait en partie, comme l'indique sa position FOED sur la figure 21, les composantes horizontales des pressions élémentaires sur la partie plongée OED du corps solide donnent, comme tout à l'heure, une résultante nulle, et les composantes verticales sont les mêmes que celles de la pesanteur sur le fluide dont la partie plongée du solide occupe la place. Il faut dès lors, pour qu'il y ait équilibre, *que le poids du corps soit égal au poids de la partie du fluide qu'il déplace et que les centres de gravité du corps et du volume de fluide déplacé soient situés sur la même verticale.* Si le corps et le fluide sont tous deux homogènes, le centre de gravité de la partie plongée du corps coïncide avec celui du volume du fluide déplacé. Si l'on désigne, d'ailleurs, par w le volume de la partie plongée du corps, w' le volume de la partie qui émerge, ρ étant la densité du corps, $\rho' = \rho + \delta$ celle du fluide, il faut, d'après la première des deux conditions d'équilibre qui viennent d'être énoncées, qu'on ait

$$\rho g (w + w') = (\rho + \delta) g w,$$

d'où l'on déduit

$$\rho w' = \delta w.$$

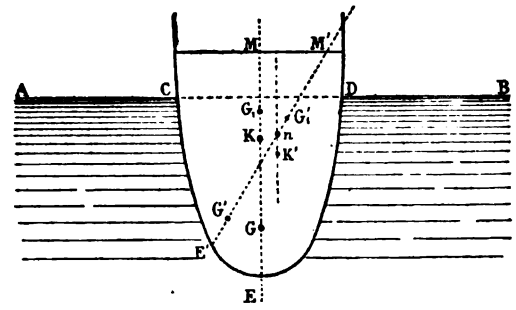
Il faut, pour satisfaire à cette relation, *que le plan de flottaison partage le corps en deux parties, dont les volumes soient entre eux dans le rapport de la densité du corps à l'excès de la densité du fluide sur celle du solide.* Si cette condition est satisfaite et que les centres de gravité des deux parties du corps soient sur la même verticale, l'équilibre est assuré.

L'équilibre d'un corps flottant étant établi, d'après ce qui vient d'être dit, il ne reste plus qu'à chercher les conditions de stabilité de cet équilibre.

Considérons le corps flottant CDE (fig. 22), AB étant toujours le plan de

niveau de la surface libre du fluide. Soient G et K les centres de gravité du corps et du fluide déplacé, l'équilibre du corps flottant se réduit, en vertu de ce qui vient d'être dit, à celui de deux forces verticales, l'une égale au poids du corps agissant au point G de haut en bas, l'autre qui lui est égale et agissant au point K de bas en haut, les points G et K étant, d'ailleurs, situés sur la même verticale ME. Si l'on modifie un peu la position du corps flottant de manière à amener son centre de gravité en G′, la verticale ME ou l'axe du corps prenant la position M′E′, et si K′ est la nouvelle position du centre de gravité du fluide déplacé, le corps flottant sera sollicité par deux forces verticales et de sens contraire, l'une qui est le poids du corps agissant en G′ de haut en bas, l'autre égale au poids du fluide déplacé agissant en K′ de bas en haut. Le résultat de l'action de ces deux forces parallèles sera de faire monter ou descendre verticalement le centre de gravité G′ du corps suivant que le poids du volume de fluide déplacé sera plus grand ou plus petit que le poids du corps, et de faire tourner ce corps autour d'un axe passant par le point G′ et perpendiculaire à la direction des forces et au plan vertical contenant les points G′ et K′. Cet axe horizontal et la nouvelle position M′E′ de l'axe du corps déterminent un plan auquel nous supposerons celui de la figure perpendiculaire; la trace de ce plan sur celui de la figure sera la ligne M′E′. Si par le point K′ on mène une verticale qui rencontre en *n* ce plan, l'axe M′E′ du corps tendra à revenir à sa position primitive ME, si le point *n* est placé au-dessus du point G′, tandis que, s'il était placé au-dessous, l'axe du corps tendrait à se relever de plus en plus vers la droite. Ainsi, par exemple, si le centre de gravité du corps était en G_1 au lieu d'être, comme nous l'avons d'abord supposé, en G, et qu'il se fût déplacé en G'_1, le point *n* se trouverait au-dessous du point G'_1, et dans cette position l'oscillation tendrait à s'accentuer davantage. Le point *n*, qui joue un rôle important dans la construction des navires, a reçu le nom de *métacentre*.

Fig. 22.



Lorsque le corps flottant sera dérangé de sa position d'équilibre par suite de l'action des forces extérieures, il tendra toujours à revenir à cette position si le métacentre est, dans toutes les positions que ces forces peuvent faire prendre au corps flottant, placé au-dessus de son centre de gravité. Le corps

flottant tendra, au contraire, sous l'action de la même force à s'éloigner de plus en plus de sa position d'équilibre, si le métacentre est situé au-dessous du centre de gravité.

La condition de stabilité de l'équilibre d'un corps flottant est donc *que le métacentre reste au-dessus du centre de gravité dans toutes les positions que pourra prendre le corps flottant.*

Il faut remarquer toutefois que le métacentre peut, suivant la position que prendrait accidentellement le corps flottant, être tantôt au-dessus tantôt au-dessous de son centre de gravité, et, pour déterminer complètement les conditions de stabilité, il faudrait analyser la nature des mouvements que pourrait prendre le corps flottant. Les calculs qu'il y aurait à faire pour cela deviendraient absolument étrangers à mon sujet, et je dois me borner, dès lors, aux conditions générales que je viens d'analyser.

CHAPITRE II.

HYDRODYNAMIQUE.

82. *Subdivisions adoptées.* — On a vu au chapitre précédent que, dans l'hydrostatique, on pouvait, sans erreur, admettre l'hypothèse théorique de la mobilité absolue des fluides, les résultats des formules établies avec cette hypothèse ne différant pas de ceux que donne l'expérience. Dans l'hydrodynamique, il n'en est plus de même; mais il y a, cependant, encore des cas où les résultats des formules basées sur cette hypothèse abstraite concordent assez avec l'expérience pour qu'en pratique on doive se servir de ces formules de préférence aux formules plus compliquées qui tiendraient compte des frottements intérieurs des fluides, dans la limite où cette partie peu avancée de la science permettrait de déterminer leur influence sur le mouvement. Il me paraît, dès lors, rationnel de scinder l'hydrodynamique en deux parties, suivant que l'on néglige les frottements ou que l'on cherche à en tenir compte.

ARTICLE 1er. — CAS DE LA MOBILITÉ ABSOLUE OU DES FLUIDES PARFAITS DANS LEQUEL IL EST FAIT ABSTRACTION DU FROTTEMENT.

83. *Équations du mouvement.* — Pour passer des équations de l'équilibre à celles du mouvement, il suffit d'introduire dans les premières les inerties. Les composantes de l'inertie, suivant les trois axes rectangulaires des coordonnées, ont, pour un point de masse m dont les coordonnées sont x, y, z au bout du temps t, les valeurs $-m\frac{du}{dt}$, $-m\frac{dv}{dt}$, $-m\frac{dw}{dt}$, u, v, w étant les composantes de la vitesse de ce point; mais, dans les équations d'équilibre (E) du numéro 70, les forces X, Y, Z sont rapportées à l'unité de masse; les composantes des inerties rapportées à la même unité sont u', v', w', en posant $u'=\frac{du}{dt}$, $v'=\frac{dv}{dt}$, $w'=\frac{dw}{dt}$, et les équations (E) deviendront dès lors, en y remplaçant X, Y, Z par $X-u'$, $Y-v'$, $Z-w$,

$$(E_1)\qquad \begin{cases} \frac{dp}{dx}=\rho\left(X-u'\right), \\ \frac{dp}{dy}=\rho\left(Y-v'\right), \\ \frac{dp}{dz}=\rho\left(Z-w'\right). \end{cases}$$

Si l'on remarque maintenant que u, v, w sont des fonctions de x, y, z et de t, leurs différentielles complètes (du), (dv), (dw) ont pour expressions :

$$\begin{aligned}
(du) &= \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz,\\
(dv) &= \frac{dv}{dt}dt + \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz,\\
(dw) &= \frac{dw}{dt}dt + \frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz.
\end{aligned}$$

Mais, comme la molécule que l'on considère se meut sur une trajectoire pour laquelle on a :

$$\begin{aligned}
dx &= udt,\\
dy &= vdt,\\
dz &= wdt,
\end{aligned}$$

les expressions précédentes deviennent :

$$\begin{aligned}
(du) &= \left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\right)dt,\\
(dv) &= \left(\frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}\right)dt,\\
(dw) &= \left(\frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}\right)dt;
\end{aligned}$$

d'où l'on tirerait les expressions $\frac{(du)}{dt}$, $\frac{(dv)}{dt}$, $\frac{(dw)}{dt}$ de u', v', w', qui seraient :

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},\\
v' &= \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz},\\
w' &= \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}.
\end{aligned}$$

Ces valeurs, étant substituées dans les équations (E_1), transforment ces équations dans les suivantes :

$$(E_2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{dp}{dx} &= \rho\left(X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}\right),\\
\frac{dp}{dy} &= \rho\left(Y - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz}\right),\\
\frac{dp}{dz} &= \rho\left(Z - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}\right).
\end{aligned}\right.$$

C'est sous cette forme que l'on trouve présentées dans les traités de mécanique les équations indéfinies du mouvement des fluides.

A ce système d'équations différentielles il faut joindre une autre équation, qu'on appelle l'équation de continuité, et qui exprime que l'accroissement de masse reste constamment égal à la différence de la masse entrée dans un élément de volume et de la masse qui en est sortie dans le même temps.

Si dx, dy, dz est l'élément de volume, la masse contenue dans ce volume élémentaire sera $\rho\, dx\, dy\, dz$ au bout du temps t, et la masse qui y sera contenue au bout du temps $t+dt$ sera $\left(\rho+\frac{d\rho}{dt}dt\right)dx\,dy\,dz$. L'accroissement de masse dans le temps dt est donc $\frac{d\rho}{dt}dt.dx\,dy\,dz$. Or la masse entrée par trois faces contiguës du volume élémentaire pendant le temps dt a pour expression :

$$dy\,dz\,\rho\,u dt+dx\,dz\,\rho\,v dt+dx\,dy\,\rho\,w dt,$$

et celle qui sort dans le même temps par les trois faces opposées du petit parallélipipède vaut :

$$dy\,dz\left(\rho\,u+\frac{d\rho u}{dx}dx\right)dt+dx\,dz\left(\rho\,v+\frac{d\rho v}{dy}dy\right)dt+dy\,dy\left(\rho\,w+\frac{d\rho w}{dz}dz\right)dt.$$

La différence entre la masse entrée et la masse sortie a, dès lors, pour expression :

$$-dx\,dy\,dz\left(\frac{d\rho\,u}{dx}+\frac{d\rho\,v}{dy}+\frac{d\rho\,w}{dz}\right)dt,$$

et il suffit d'égaler à cette quantité l'accroissement de masse dont l'expression $\frac{d\rho}{dt}dt\,dx\,dy\,dz$ a été donnée plus haut, ce qui conduit à l'équation :

$$\text{(R)}\qquad \frac{d\rho}{dt}+\frac{d(\rho\,u)}{dx}+\frac{d(\rho\,v)}{dy}+\frac{d(\rho\,w)}{dz}=0.$$

Les quatre équations (E_2) et (R) devront être satisfaites, pour tous les points de l'espace occupé par le fluide, par les expressions de u, v, w, ρ et p en fonction de t, x, y, z. Ce système de quatre équations ne permettrait pas, dès lors, de déterminer ces cinq quantités, à moins de se donner une relation entre deux d'entre elles ou une condition qui fît disparaître l'une des inconnues. S'il s'agit d'un fluide incompressible, comme l'eau par exemple, fût-il même hétérogène, on a $\rho=$ constante, en suivant une même molécule, ou

$$d\rho=\frac{d\rho}{dt}dt+\frac{d\rho}{dx}u\,dt+\frac{d\rho}{dy}v\,dt+\frac{d\rho}{dz}w\,dt=0,$$

soit

$$\frac{d\rho}{dt}+u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}=0;$$

alors l'équation (R), qui n'est autre que celle-ci :

$$\frac{d\rho}{dt}+u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}+\rho\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)=0,$$

se réduit à

$$\text{(S)}\qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

Les équations (E_2) et (S) constituent un système de quatre équations différentielles entre les quatre quantités u, v, w, p, qui déterminent complètement le mouvement.

S'il s'agissait d'un fluide élastique, par exemple d'un gaz permanent, les lois de Mariotte et de Gay-Lussac conduiraient à la relation suivante entre la pression et la densité :

$$\text{(T)}\qquad p=K\rho,$$

dans laquelle K est un coefficient qui reste constant autant que la température reste constante elle-même.

L'équation (T), jointe aux équations (E_2) et (R), donnerait cinq équations différentielles en u, v, w, p et ρ, qui serviraient à déterminer ces cinq quantités.

Mais l'intégration de ces équations est impossible en général, et il faut se résigner à n'opérer que sur des cas particuliers dont les données spéciales rendent l'intégration possible. Ce n'est qu'à ce prix que l'on peut arriver, quant à présent, à quelques résultats assez simples pour être transportés dans la pratique.

On remarquera maintenant que, dans ce qui précède, nous avons regardé x, y, z comme des variables indépendantes; mais, si ces coordonnées représentaient les distances aux plans coordonnés d'une molécule au bout du temps t, on aurait :

$$dx=udt,$$

$$dy=vdt,$$

$$dz=wdt.$$

Les équations générales établies plus haut permettraient de déterminer u, v, w en fonction de x, y, z, t, et l'on aurait ainsi trois équations de la forme

$$u = f_1(x, y, z, t), \qquad v = f_2(x, y, z, t), \qquad w = f_3(x, y, z, t).$$

Si l'on veut suivre une même molécule dans son mouvement, il faut, dans ces dernières équations, faire

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dw}{dt},$$

et elles deviennent :

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z, t),$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z, t).$$

On a ainsi trois équations différentielles simultanées à intégrer. Si cette intégration est possible, on en déduit les valeurs de x, y, z en fonction de leurs valeurs initiales x_0, y_0, z_0 et de t. L'élimination de t entre ces trois équations donnerait d'ailleurs deux équations en x, y, z, qui appartiendraient à la courbe décrite par la molécule dont les coordonnées étaient x_0, y_0, z_0 au moment où l'on a commencé à compter le temps. Les équations de ces trajectoires ne différeraient, dès lors, d'une molécule à l'autre, que par les valeurs des constantes x_0, y_0, z_0.

84. *Conditions relatives aux surfaces limites.* — Si le fluide, au lieu d'occuper un espace indéfini, comme on l'a supposé pour les calculs du numéro précédent, était limité par des surfaces en mouvement ou fixes, il faudrait que les molécules contiguës à ces surfaces restassent pendant un temps infiniment petit dt, en leur mouvement, dans le plan tangent à la surface.

Si

$$F = 0$$

est l'équation de la surface supposée mobile, qui est, par conséquent, fonction de x, y, z, t, la condition qui vient d'être énoncée entraîne la suivante :

$$\frac{dF}{dt}dt + \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0,$$

qui, en vertu des équations

$$dx = udt,$$
$$dy = vdt,$$
$$dz = wdt,$$

devient

$$\text{(U)} \qquad \frac{dF}{dt} + u\frac{dF}{dx} + v\frac{dF}{dy} + w\frac{dF}{dz} = 0.$$

Si la surface était fixe, on aurait

$$\frac{dF}{dt} = 0,$$

et cette équation deviendrait

$$\text{(V)} \qquad u\frac{dF}{dx} + v\frac{dF}{dy} + w\frac{dF}{dz} = 0.$$

Les équations (U) et (V) devraient, suivant les deux cas auxquels elles se rapportent, être satisfaites par les coordonnées appartenant à la surface du fluide en contact avec ces surfaces limites. Il faudra, dès lors, que les équations du système des trajectoires indiqué à la fin de l'article 83 soient telles, qu'en prenant, dans ces équations, pour les constantes x_0, y_0, z_0, les coordonnées d'un point déterminé de la surface limite, à l'origine du mouvement, les équations particulières qui en résulteront s'accordent, suivant le cas de surfaces limites en mouvement ou fixes, avec les équations (U) ou (V).

85. *Conditions relatives à la surface libre.* — Si l'on a affaire à un fluide incompressible, l'équation de sa surface libre, qui appartient, comme on l'a vu au numéro 75, à la famille des surfaces de niveau, attendu que la pression atmosphérique est supposée constante, serait, puisque la pression reste constante sur toute l'étendue de cette espèce de surfaces,

$$p - p_0 = 0,$$

et, outre une équation telle que (U), on aurait de plus dans ce cas, où les déplacements et déformations de la surface ne sont pas donnés *a priori*, la condition spéciale destinée justement à les déterminer :

$$\text{(X)} \qquad \frac{dp}{dt} + u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz} = 0.$$

86. *Expression de la pression.* — Si l'on multiplie les équations (E) du

numéro 83 respectivement par dx, dy, dz, et qu'on les ajoute, il vient, en divisant d'ailleurs par ρ,

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz\right]=\mathrm{X}\,dx+\mathrm{Y}\,dy+\mathrm{Z}\,dz-\left(u'\,dx+v'\,dy+w'\,dz\right).$$

Si l'on suppose maintenant que l'on suive une molécule dans son mouvement ou que l'on ait $dx=udt$, $dy=vdt$, $dz=wdt$, et en observant, d'ailleurs, que l'on a

$$dp=\frac{dp}{dt}dt+\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz,$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{\rho}\left(dp-\frac{dp}{dt}dt\right)=\mathrm{X}\,dx+\mathrm{Y}\,dy+\mathrm{Z}\,dz-\left(uu'+vv'+ww'\right)dt.$$

Mais $u'dt$, $v'dt$, $w'dt$ sont justement les petits accroissements éprouvés par les composantes u, v, w de la vitesse de la molécule qu'on suit dans son mouvement en faisant croître à la fois t de dt et x, y, z de udt, vdt, wdt, de sorte que $(uu'+vv'+ww')\,dt$ peut être remplacé par

$$u\,du+v\,dv+w\,dw=d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)=\frac{1}{2}d\mathrm{V}^2,$$

et l'équation précédente devient définitivement

$$(\mathrm{F}_1)\qquad \frac{1}{\rho}\left[dp-\frac{dp}{dt}dt\right]=\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz-\frac{1}{2}d\mathrm{V}^2.$$

Cette équation, en y joignant l'équation de continuité et les conditions concernant les surfaces limites du fluide, renferme toute l'hydrodynamique des fluides parfaits où l'on fait abstraction des frottements, de même que l'équation (F) du numéro 71 contient toute l'hydrostatique.

86 *bis. Cas où il existe une fonction des vitesses.* — Lorsque la fonction $udx+vdy+wdz$ est une différentielle complète par rapport à x, y, z d'une fonction de ces trois variables, elle reçoit le nom de *fonction des vitesses*, que lui a donné Lagrange, et si φ désigne cette fonction, on a la relation

$$(\mathrm{Y})\qquad d\varphi=udx+vdy+wdz,$$

qui est de même forme que la fonction potentielle $d\Phi$, dont nous nous sommes occupé au numéro 72, et qui donnait

$$d\Phi=\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz.$$

On voit que la fonction des vitesses se déduirait, en effet, de la fonction potentielle en remplaçant, dans celle-ci, les forces rapportées à l'unité de masse par les vitesses.

Lagrange a démontré que, si au bout du temps t il y a une fonction des vitesses, cette fonction subsistera encore au bout du temps $t+dt$, et, par conséquent, à un instant quelconque du mouvement; d'où résulte que, si $udx+vdy+wdz$ est une différentielle exacte à l'état initial du mouvement, ce qu'il est toujours facile de vérifier alors, il en sera de même à un instant quelconque du mouvement, et cette condition sera toujours remplie lorsque les vitesses initiales des molécules seront nulles. Il faut, toutefois, pour qu'il en soit ainsi, que les forces extérieures X, Y, Z admettent un potentiel, c'est-à-dire que l'on ait

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=d\Phi,$$

relation déjà expliquée au numéro 72.

La relation (Y) entraîne en effet les trois conditions suivantes :

$$(Z)\qquad \begin{cases} u=\dfrac{d\varphi}{dx}, \\ v=\dfrac{d\varphi}{dy}, \\ w=\dfrac{d\varphi}{dz}. \end{cases}$$

En ajoutant les équations (E_2) du numéro 83, après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz, et désignant par dp la différentielle complète en x, y, z ou abstraction faite de t,

$$\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz,$$

on obtient l'équation

$$(F')\quad dp=\rho\left(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\right)-\rho\cdot d\frac{d\varphi}{dt}-\rho\,\frac{1}{2}\,d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Or il est facile de vérifier sur cette équation, à laquelle conduit l'existence d'une fonction des vitesses, que celle-ci entraîne, comme on l'a dit un peu plus haut, celle d'un potentiel; car l'équation (F') résolue par rapport à $Xdx+Ydy+Zdz$ donne

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=\frac{dp}{\rho}+d\cdot\frac{d\varphi}{dt}+d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right);$$

et ce second membre n'est autre chose que la différentielle exacte de

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right).$$

Reprenons ici l'équation (F) du numéro 71 :

$$\text{(F)} \qquad dp = \rho\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

En comparant les deux expressions (F) et (F′), on voit que le premier terme du second membre de l'équation (F′) n'est autre chose que le second membre de l'équation (F), qui donne la différentielle de la pression hydrostatique; de sorte que *la pression hydrodynamique est égale à la pression hydrostatique diminuée d'une certaine quantité due à la vitesse, et sur une même molécule la pression est moindre si le fluide est en mouvement qu'elle ne le serait s'il était en repos.*

L'équation (F′), si on l'applique au mouvement d'une molécule sur sa trajectoire, peut se transformer encore et prendre une expression très simple. On a d'abord, si V est la vitesse de la molécule,

$$\mathrm{V}\,ds = u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

ou

$$d\varphi = \mathrm{V}\,ds;$$

d'où

$$d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d\mathrm{V}}{dt}\,ds;$$

on a aussi

$$\mathrm{V}^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

ou, en vertu des équations (Z),

$$\mathrm{V}^2 = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2.$$

En vertu de ces relations, l'équation (F′) devient

$$\text{(F''')} \qquad dp = \rho\left(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz\right) - \rho\frac{d\mathrm{V}}{dt}\,ds - \rho\frac{1}{2}\,d\,\mathrm{V}^2,$$

équation qui se déduirait aussi de l'équation générale (F_1) donnée au numéro 86. Il faut pour cela convenir de ne prendre les différentielles dites complètes qu'en x, y, z et non en t, ce qui remplacerait $dp - \frac{dp}{dt}$ par dp et

dV^2 ou VdV par $V\left(dV+\frac{dV}{dt}dt\right)$; cela transforme immédiatement l'équation (F_1) du numéro 86 dans la suivante :

$$\frac{dp}{\rho}=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz-V\frac{dV}{dt}dt-V\,dV,$$

ou

$$dp=\rho\left(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\right)-\rho V\frac{dV}{dt}dt-\rho\frac{1}{2}dV^2,$$

équation identique avec l'équation (F″), puisque

$$V\frac{dV}{dt}dt=\frac{dV}{dt}ds.$$

Dans l'équation (F″), les différentielles sont toutes prises par rapport à s sans faire varier t, et la dérivée $\frac{dV}{dt}$ est prise sur place, c'est-à-dire sans faire varier s.

Enfin, comme on a, dans le cas qui nous occupe ici, $Xdx+Ydy+Zdz=d\Phi$, l'équation (F″) devient

$$(F''')\qquad \frac{dp}{\rho}=d\Phi-\frac{dV}{dt}ds-\frac{1}{2}d\left(V^2\right);$$

ce qui est la forme la plus simple à laquelle on puisse la ramener. Elle détermine le mouvement d'une molécule sur sa trajectoire, le long de laquelle sont comptés les s.

Aux équations (F′), (F″), (F‴), suivant qu'on se servira de l'une ou de l'autre de ces équations, il faudra, d'ailleurs, toujours joindre, ne l'oublions pas, l'équation de continuité, qui sera l'équation (R) du numéro 83, dans le cas d'un fluide élastique, et l'équation (S), dans celui d'un fluide incompressible. A ces équations il faudra joindre encore, lorsque l'on aura affaire, non plus à un fluide de masse indéfinie, mais à un fluide contenu entre des parois, les équations relatives aux surfaces limites données aux numéros 84 et 85, l'équation (U) s'appliquant au cas où les surfaces limites sont en mouvement, l'équation (V) à celui où elles sont fixes, et l'équation (X) s'appliquant, outre une équation telle que (U), à la surface libre du fluide.

87. *Filets fluides. — Hypothèse du parallélisme des tranches.* — Les équations (F′), (F″), (F‴), données plus haut, ne s'appliquent rigoureusement qu'au mouvement d'une molécule sur sa trajectoire; mais elles pourraient s'appliquer à un faisceau de trajectoires ou de *filets fluides contigus*, pourvu que la section de ce faisceau, par un plan normal à son axe, fût assez petite pour que

toutes les molécules qui passeraient à un instant donné par cette section eussent la même vitesse. Ces équations s'appliqueraient, dès lors, tout aussi bien au mouvement d'un fluide dans un tuyau ayant même axe que le faisceau et dont la section normale à cet axe serait, en un point quelconque de l'axe, la même que celle du faisceau lui-même, en négligeant, bien entendu, le frottement contre la paroi du tuyau. Dans ce cas, tous les filets fluides du faisceau seraient, d'ailleurs, parallèles ou du moins sensiblement parallèles.

Dans ce nouvel ordre d'idées, et le faisceau étant supposé passer constamment par l'axe fixe des s ou dans son voisinage, l'équation de continuité prend une forme très simple, en y faisant entrer l'aire ω de la section normale à l'axe du faisceau de filets ou du tuyau qui correspond à la valeur de l'arc s, comptée sur l'axe à partir d'un point fixe pris sur cet axe. La masse de fluide contenue dans la tranche élémentaire, ayant ω pour section et ds pour épaisseur, vaudra $\rho\omega ds$ au bout du temps t et $\left(\rho\omega + \frac{d\cdot\rho\omega}{dt}dt\right)ds$ au bout du temps $t+at$. Si l'on admet, d'ailleurs, comme nous l'avons fait tout à l'heure pour arriver à la composition du faisceau, que la vitesse V de toutes les molécules passant dans la section ω soit la même au bout du temps t, il entrera dans la tranche élémentaire par une face, pendant le temps dt, une masse valant $\rho\omega V dt$, et il en sortira, par la face opposée, une masse valant $\left(\rho\omega V + \frac{d\cdot\rho\omega V}{ds}ds\right)dt$; de sorte que, pour avoir l'équation de continuité, il faut écrire

$$\rho\omega V dt - \left(\rho\omega V + \frac{d\rho V\cdot ds}{ds}\right)dt = \left(\rho\omega + \frac{d\cdot\rho\omega}{dt}dt\right)ds - \rho\omega ds,$$

d'où

$$\text{(R')} \qquad \frac{d\cdot\rho\omega}{dt} + \frac{d\cdot\rho\omega V}{ds} = 0.$$

Telle serait l'équation de continuité qui conviendrait au cas d'un courant fluide de section transversale permanente, et assez petite pour que la vitesse pût être regardée comme étant, à un instant donné, la même sur tous les points de cette section. Dans un pareil système, toutes les molécules passant dans une section donnée ont la même vitesse que celles qui suivraient la trajectoire servant d'axe au faisceau, de sorte que, si l'on partage le faisceau par tranches infiniment minces normales à l'axe, les vitesses, dans chacune de ces tranches, seront les mêmes que sur les points de l'axe où celui-ci est coupé par les tranches. On suppose, en outre, que toutes les molécules qui ont passé par une tranche passeront par toutes les autres tranches, ce qui sous-entend la conservation du volume de ces tranches. L'équation de continuité,

dans sa forme (R'), ne convient donc qu'à l'ensemble de ces hypothèses auquel on a donné le nom d'*hypothèse du parallélisme des tranches*. Cette équation, jointe, suivant les cas, à l'équation (F'') et à l'équation (F'''), suffira pour déterminer la vitesse V et la pression p à chaque instant du mouvement, lorsque la densité ρ sera, d'ailleurs, elle-même donnée en fonction de p ou qu'elle sera constante.

88. *Application à un fluide pesant.* — Dans le cas d'un fluide pesant, les z étant comptés de haut en bas, c'est-à-dire dans le sens de la pesanteur, on a

$$X = 0,$$
$$Y = 0,$$
$$Z = g.$$

Il y a, dès lors, une fonction potentielle $d\Phi$, qui est

$$d\Phi = gdz;$$

en vertu de cette relation, l'équation (F''') devient

$$(F'') \qquad \frac{dp}{\rho} = gdz - \frac{dV}{dt}ds - \frac{1}{2}d\left(V^2\right).$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante et posant, d'ailleurs, $\pi = \rho g$:

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{g}\left(\frac{dV}{dt} + \frac{Vdv}{ds}\right) = \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds},$$

à laquelle il faudrait joindre l'équation de continuité établie tout à l'heure :

$$(R') \qquad \frac{d.\rho\omega}{dt} + \frac{d.\rho\omega V}{ds} = 0.$$

On peut arriver directement à l'équation (α), au moins pour le cas particulier de filets sensiblement rectilignes, en appliquant le principe des quantités de mouvement à une tranche très mince du fluide dont ω serait l'aire de la section normale à l'axe suivant lequel se fait le mouvement.

Si s est la longueur de l'arc comptée sur l'axe à partir d'un point fixe pris sur cet axe à laquelle se trouve la section ω au bout du temps t, ds sera l'épaisseur de notre tranche élémentaire, et son poids sera $\pi\omega ds$; la différence des pressions $p\omega$ et $(p+dp)\omega$ qui ont lieu sur les deux faces opposées de la

tranche sera $-\omega dp$; les projections de ces forces sur l'axe du faisceau de filets, dont ω est la section transversale, vaudront

$$\pi\omega ds\frac{dz}{ds}$$

et

$$-\omega dp,$$

et les impulsions correspondantes, estimées pour un temps très petit Δt, vaudront

$$\pi\omega ds\frac{dz}{ds}\cdot\Delta t$$

et

$$-\omega dp\Delta t.$$

La masse de la tranche vaut $\frac{\pi\omega ds}{g}$, et l'accroissement de la quantité de mouvement pendant l'intervalle de temps Δt aura pour expression :

$$\frac{\pi\omega ds}{g}\cdot\frac{d(\mathrm{V})}{dt}\Delta t,$$

$d(\mathrm{V})$ indiquant la différentielle de V regardée comme fonction de s et de t. En effectuant la différentiation, l'expression précédente devient

$$\frac{\pi\omega ds}{g}\left(\frac{d\mathrm{V}}{dt}+\frac{\mathrm{V}d\mathrm{V}}{ds}\right)\Delta t,$$

et, en égalant, en vertu du principe des quantités de mouvement du numéro 36, cette expression à la somme des projections sur l'axe des impulsions des forces, il vient, en divisant d'ailleurs les deux membres de l'équation par $\pi\omega ds\Delta t$,

$$\frac{1}{g}\left(\frac{d\mathrm{V}}{dt}+\frac{\mathrm{V}d\mathrm{V}}{ds}\right)=\frac{dz}{ds}-\frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds},$$

ce qui reproduit exactement l'équation (α).

89. *Application au mouvement d'un courant d'eau de section très petite.* — Considérons un courant d'eau composé de filets parallèles, dont la section normale à l'axe de ce faisceau de filets soit assez petite pour que tous ces filets traversent la section avec la même vitesse, ou bien, ce qui revient absolument au même et a l'avantage de mieux fixer les idées, un tuyau dans lequel le fluide serait en mouvement sans frottement et dont le diamètre serait assez

petit pour que, dans une section quelconque de ce tuyau, normale à son axe, la vitesse fût la même dans tous les points de cette section.

L'équation à appliquer ici est l'équation (α), donnée au numéro 88 :

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{g}\left(\frac{dV}{dt}+\frac{VdV}{ds}\right)=\frac{dz}{ds}-\frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds},$$

à laquelle il faut joindre l'équation de continuité (R'), qui, dans le cas d'un fluide pesant incompressible qui nous occupe ici et pour lequel la densité ρ est constante, devient

$$d\frac{\omega V}{ds}=0,$$

d'où l'on déduit

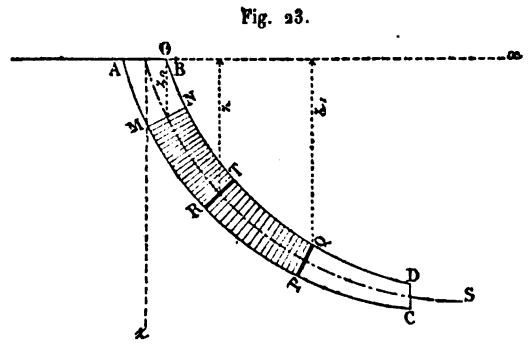
$$\omega V=\text{const.}$$

Il résulte de là que, si ω' désigne l'aire d'une section déterminée et V' la vitesse dans cette section, on aura

$$(\beta) \qquad \omega V=\omega' V'.$$

Les équations (α) et (β) serviront à déterminer la vitesse V et la pression p dans une section quelconque ω, en appropriant ces équations à la forme du courant liquide ou du tuyau dans lequel nous supposons qu'a lieu le mouvement et qui est, pour fixer les idées, indiqué par la figure 23.

Fig. 23.



Les z sont comptés de haut en bas, à partir d'un plan horizontal supérieur AB, et l'axe du tuyau est dans le plan vertical qui coupe le plan horizontal AB suivant la ligne Ax. Le point où l'axe du tuyau rencontre cette ligne prise pour axe des x est pris pour origine des coordonnées x, z, auxquelles est rapportée la courbe donnée de l'axe du tuyau. C'est aussi à partir de cette origine que se comptent, sur cet axe, les s ou abscisses curvilignes des points de rencontre de l'axe avec les sections successives du tuyau normales à l'axe.

Cela posé, désignons par ω_0 l'aire de la section supérieure MN de la colonne fluide, V_0 la vitesse dans cette section, z_0 étant l'ordonnée du point de rencontre de cette section avec l'axe, par ω_1, V_1, z_1 les mêmes quantités pour la section inférieure PQ de la colonne fluide, et par ω, V, z les mêmes quantités

pour une section quelconque RT comprise entre les sections supérieure et inférieure, MN, PQ, ω' la section que l'on se donne et V' la vitesse dans cette section.

L'équation (β) montre d'abord que, ω' étant donné, il suffira de déterminer la vitesse V' dans cette section pour que l'on en déduise immédiatement la vitesse V dans une section quelconque, ω, et c'est dès lors à la recherche de cette vitesse V' que la question se trouve ramenée.

On tire de l'équation (β)

$$V = \frac{\omega'}{\omega} V',$$

d'où, en différentiant par rapport au temps,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\omega'}{\omega}\frac{dV'}{dt},$$

et ces valeurs de V et $\frac{dV}{dt}$, substituées dans l'équation (α), la transforment dans la suivante, en multipliant d'ailleurs ses deux membres par πds :

$$dp = \pi dz - \frac{\pi\omega'}{g}\frac{dV'}{dt}\cdot\frac{ds}{\omega} - \frac{\pi}{g} V \frac{dV}{ds} ds = \pi dz - \frac{\pi\omega'}{g}\frac{dV'}{dt}\cdot\frac{ds}{\omega} - \frac{\pi\omega'^2 V'^2}{2g} d\left(\frac{1}{\omega^2}\right),$$

d'où, intégrant par rapport à s et déterminant la constante de manière que $p = p_0$ pour $z = z_0$, $s = s_0$, $\omega = \omega_0$, et supposant, d'ailleurs, la pression p_0 sur la surface supérieure constante,

$$(\gamma) \qquad p = p_0 + \pi\left(z - z_0\right) - \frac{\pi\omega'}{g}\frac{dV'}{dt}\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\omega} - \frac{\pi}{2g} V'^2\left(\frac{\omega'^2}{\omega^2} - \frac{\omega'^2}{\omega_0^2}\right).$$

En appliquant cette relation à la section inférieure PQ de la colonne dans laquelle la pression serait $p = p_1$ pour $z = z_1$, $s = s_1$, $\omega = \omega_1$, on a, d'ailleurs :

$$(\gamma_1) \qquad p_1 = p_0 + \pi\left(z_1 - z_0\right) - \frac{\pi\omega'}{g}\frac{dV'}{dt}\int_{s_0}^{s_1}\frac{ds}{\omega} - \frac{\pi}{2g} V'^2\left(\frac{\omega'^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega'^2}{\omega_0^2}\right).$$

Si maintenant, entre cette équation et l'équation (γ), on élimine $\frac{dV'}{dt}$ et que l'on pose

$$z - z_0 = \zeta,$$

$$z_1 - z_0 = \zeta_1,$$

$$\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\omega} = A,$$

$$\int_{s_0}^{s_1}\frac{ds}{\omega} = B,$$

il viendra, pour la valeur de la pression p, dans une section quelconque normale à l'axe,

$$(\gamma_2)\quad p = p_0 + (p_1 - p_0)\frac{A}{B} + \pi\left(\zeta - \zeta_1 \frac{A}{B}\right) - \frac{\pi V'^2}{2g}\left[\left(\frac{\omega'^2}{\omega^2} - \frac{\omega'^2}{\omega_0^2}\right) - \frac{A}{B}\left(\frac{\omega'^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega'^2}{\omega_0^2}\right)\right].$$

Cette équation donnerait p si la valeur de V' était connue, attendu que A et B se calculeraient aisément d'après la figure du tuyau et le volume de fluide donné qui constitue la colonne en mouvement. Il résulte, en effet, de ces deux éléments une relation nécessaire entre ω et s, de sorte que, ω étant une fonction de s, les deux intégrales représentées par A et B se peuvent calculer sans difficulté. Il reste donc à déterminer V' et, pour cela, nous écrirons l'équation (γ_1) de la manière suivante :

$$(\gamma_1')\qquad p_1 = p_0 + \pi\zeta_1 - \frac{\pi}{g}\omega'\frac{dV'}{dt}B - \frac{\pi}{2g}V'^2\left(\frac{\omega'^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega'^2}{\omega_0^2}\right).$$

Nous aurons, d'ailleurs, $\frac{ds_0}{dt}$ étant la vitesse dans la section supérieure MN, et d'après l'équation de continuité,

$$\frac{ds_0}{dt} = \frac{\omega' V'}{\omega_0},$$

ou bien

$$(\beta_0)\qquad \omega_0\, ds_0 = \omega' V' dt.$$

Dans les équations (γ_1) et (β_0), les quantités ω_0, ω_1, s_1 et B sont des fonctions de s_0 et ω' est donnée. Elles déterminent, dès lors, les variables s_0 et V' en fonctions de t et de leurs valeurs initiales; car les deux relations (γ'_1) et (β_0) sont deux équations différentielles simultanées du premier ordre en s_0 et V'. La valeur de V' étant ainsi déterminée, on la reportera dans l'équation (γ_2), qui donnera la valeur de la pression dans une section quelconque ω, et la vitesse V, dans cette section, sera donnée par l'équation de continuité qui conduit à l'expression

$$V\omega = V'\omega'.$$

C'est ainsi que se résoudrait, d'une manière générale, la question du mouvement d'une colonne fluide pesante, homogène et incompressible.

Les hypothèses que l'on peut faire sur la position des sections extrêmes MN et PQ de la colonne en mouvement peuvent simplifier notablement les calculs qui viennent d'être indiqués pour le cas général.

Supposons, d'abord, que la section supérieure MN de la colonne coïncide

avec la section horizontale AB, qui termine le tuyau par en haut ou ce qu'on appelle, en pratique, l'orifice d'entrée, le niveau supérieur restant constant pendant que la section inférieure PQ descend. Il entre, dans ce cas, par la section supérieure AB, des quantités suffisantes de fluide pour maintenir son niveau; on aura, pour cette section,

$$z_0 = 0, \qquad s_0 = 0,$$

et la valeur de ω_0 sera, dans ce cas, une constante donnée. Au lieu de l'équation (β_0), applicable à la section supérieure mobile MN donnée plus haut, on aurait l'équation suivante, applicable à la section mobile inférieure PQ :

$$(\beta_0') \qquad \omega_1 ds_1 = \omega' V' dt,$$

et cette équation, jointe à l'équation (γ_2), résoudra la question, en remarquant que ω_1, ζ_1 et B seraient maintenant des fonctions de s_1.

Si l'on suppose que l'extrémité inférieure PQ de la colonne coïncide avec l'orifice de sortie CD, la surface supérieure MN de la colonne s'abaissant à mesure que l'écoulement a lieu, ce qui est le cas d'un vase qui se vide, les équations (β_0) et (γ_1) résolvent la question en faisant $\omega' = \omega$. Éclaircissons tout cela en entrant dans le détail des calculs.

90. *Cas où le vase reste constamment plein.* — Si l'on supposait que les deux sections extrêmes MN et PQ de la colonne coïncidassent avec les orifices d'entrée et de sortie AB et CD, c'est-à-dire que l'écoulement fût réglé de manière que le tuyau ABCD restât constamment plein, les équations (β_0) et (β_0') disparaissent, puisque s_0 et s_1 deviennent constants, et l'on n'a plus que l'équation (γ_1). Il faudrait, dans cette équation, regarder ω_0, ω_1 et ζ_1 comme des constantes, et elle donnerait dès lors dV_1 en t, en y faisant, d'ailleurs, $\omega' = \omega_1$, $V' = V_1$, $p = p_0$; cette équation devient, ainsi que l'avait déjà indiqué Navier, dans les belles leçons qu'il nous faisait à l'École polytechnique en 1834, dans son cours de mécanique :

$$(\gamma_3) \qquad p_1 = p_0 + \pi\zeta_1 - \frac{\pi}{g}\omega_1 \frac{dV_1}{dt} B - \frac{\pi}{g} V_1^2 \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right);$$

on en tire

$$dt = \frac{\frac{\pi}{g} B\omega_1 dV_1}{p_0 - p_1 + \pi\zeta_1 - \frac{\pi}{g}\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) V_1^2}.$$

En intégrant et déterminant la constante de manière que l'on ait $V_1 = 0$ pour $t = 0$ et en posant, d'ailleurs,

$$n = \sqrt{2g\left[\zeta_1 + \frac{p_0 - p_1}{\pi}\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)\right]},$$

on aura

$$(\gamma_4) \qquad t = \frac{B\omega_1}{n} \log \left[\frac{\dfrac{n}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}} + \sqrt{1 - \dfrac{\omega_1^2}{\omega_0^2}} \cdot V_1}{\dfrac{n}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}} - \sqrt{1 - \dfrac{\omega_1^2}{\omega_0^2}} \cdot V_1}\right],$$

et, si l'on résout cette équation par rapport à V_1,

$$(\gamma_5) \qquad V_1 = \frac{n}{1 - \dfrac{\omega_1^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{e^{\frac{nt}{B\omega_1}} - 1}{e^{\frac{nt}{B\omega_1}} + 1}.$$

ce qui donnerait; pour la vitesse V dans la section quelconque ω et d'après l'équation de continuité,

$$(\gamma'_5) \qquad V = \frac{\omega_1}{\omega} \cdot \frac{n}{1 - \dfrac{\omega_1^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{e^{\frac{nt}{B\omega_1}} - 1}{e^{\frac{nt}{B\omega_1}} + 1},$$

l'expression (γ_5) donnera la vitesse à l'orifice de sortie CD, et l'expression (γ'_5) la vitesse V dans une section quelconque RT (fig. 23); l'expression (γ_3) donnera, d'ailleurs, la pression dans une section quelconque en y remplaçant V' par V_1, ω' par ω_1; elle devient ainsi :

$$(\gamma_6) \qquad p = p_0 + (p_1 - p_0)\frac{A}{B} + \pi\left(\zeta - \zeta_1 \frac{A}{B}\right) - \frac{\pi V_1^2}{2g}\left[\frac{\omega_1^2}{\omega^2} - \frac{\omega_1}{\omega_0^2} - \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)\frac{A}{B}\right],$$

dans laquelle il suffira de substituer pour V_1 sa valeur tirée de l'équation (γ_5).

On remarquera maintenant que $e^{\frac{nt}{B\omega_1}}$ augmente rapidement avec t, ce qui permet de négliger l'unité par rapport à cette quantité; de sorte que l'expression (γ_5) se rapprochera rapidement, à mesure que t augmentera, de la limite donnée par l'expression suivante :

$$V_1 = \frac{n}{1 - \dfrac{\omega_1^2}{\omega_0^2}},$$

ou, si l'on remet pour n sa valeur posée plus haut,

$$(\gamma_7) \cdot \qquad V_1 = \sqrt{\frac{2g\left(\zeta_1 + \frac{p_0 - p_1}{\pi}\right)}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}}.$$

Cette valeur de V_1 étant indépendante du temps, on en déduirait $\frac{dV_1}{dt} = 0$; d'où, par l'équation de continuité, $\frac{dV'}{dt} = 0$ et $\frac{dV}{dt} = 0$. Ces conditions caractérisent un état spécial du mouvement que l'on appelle *permanent;* nous en parlerons plus loin avec plus de développements.

Si l'on a, d'ailleurs, égard à ces conditions, l'équation (γ_2) deviendra

$$(\gamma_8) \qquad p = p_0 + \pi\zeta - \frac{\pi\omega_1 V_1^2}{2g}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2}\right),$$

dans laquelle il suffira de substituer la valeur (γ_7) de V_1, qui convient au mouvement permanent.

Il est essentiel de remarquer que $B = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\omega}$ est une quantité constante, calculée une fois pour toutes, et que, dès lors, l'expression (γ_5), tout comme l'expression (γ_7) de la vitesse V_1 à l'orifice de sortie, ne dépend plus que de la valeur des sections extrêmes ω_0 et ω_1 et de la différence de niveau ζ_1 de ces sections; elle est absolument indépendante de la forme que prendrait le vase entre ces deux sections extrêmes; conséquence très remarquable et qui se vérifie d'ailleurs par l'expérience.

Enfin, il faut remarquer que, pour arriver à l'intégrale représentée par l'équation (γ_4), il faut supposer $1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}$ positif, c'est-à-dire $\omega_1 < \omega_0$. Il faut donc, pour que le mouvement puisse devenir permanent, que l'orifice de sortie soit plus petit que l'orifice d'entrée; s'il en était autrement, la vitesse tendrait vers l'infini avec le temps, au lieu de tendre vers la limite finie donnée par l'expression (γ_7).

Si la section du tuyau était constante, l'équation (γ_3) deviendrait, en y faisant $\omega_1 = \omega_0$,

$$(\gamma_9) \qquad p_1 = p_0 - \pi\zeta_1 - \frac{\pi}{g}\omega_1 \frac{dV_1}{dt} \cdot B.$$

On aurait, en appelant (λ_1) la longueur mesurée sur l'axe qui sépare les deux sections extrêmes,

$$B = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\omega} = \frac{\lambda_1}{\omega_1},$$

et, si l'on substitue cette valeur de B dans l'expression (γ_9) et qu'on en tire dV_1, il viendra

$$dV_1 = \frac{g\left(\zeta_1 + \frac{p_0 - p_1}{\pi}\right) dt}{\lambda_1};$$

d'où, intégrant et déterminant la constante de manière que l'on ait $V_1 = 0$ pour $t = 0$,

$$(\gamma_{10}) \qquad V_1 = \frac{g\left(\zeta_1 + \frac{p_0 - p}{\pi}\right)}{\lambda} t.$$

La vitesse croît donc proportionnellement au temps, et le mouvement serait dès lors uniformément varié.

Si λ désigne l'abscisse curviligne sur l'axe, du centre de la section quelconque ω, on aura

$$A = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\omega} = \frac{\lambda}{\omega}, \qquad B = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\omega} = \frac{\lambda_1}{\omega_1},$$

et l'expression générale (γ_2) devient, en y faisant $\omega' = \omega_0 = \omega_1 = \omega$, puisque la section est constante par hypothèse, et, en ayant égard aux valeurs de A et B qui viennent d'être indiquées,

$$(\gamma_{11}) \qquad p = p_0 + (p_1 - p_0)\frac{\lambda}{\lambda_1},$$

expression des plus simples et qui montre que, dans ce cas, la pression varie uniformément.

Si l'axe du vase était vertical et rectiligne, on aurait $s = z$, $\lambda = \zeta$, $\lambda_1 = \zeta_1$, et les expressions (γ_{10}) et (γ_{11}) deviendraient

$$(\gamma_{12}) \qquad V_1 = g\frac{\left(\zeta_1 + \frac{p_0 - p_1}{\pi}\right)}{\zeta_1} \cdot t,$$

$$(\gamma_{13}) \qquad p = p_0 + (p_1 - p_0)\frac{\zeta}{\zeta_1},$$

et, si l'on avait $p_1 = p_0$, elles deviendraient

$$V_1 = gt,$$

$$p = p_0 = p_1.$$

La première de ces équations ne fait que reproduire l'expression de la vitesse d'un corps solide pesant, tombant en vertu de sa seule pesanteur, qui a été donnée au numéro 48, et il est de toute évidence qu'il doit en être ainsi dès que l'on suppose que la section du vase reste constante ainsi que la pression, l'axe du vase étant vertical.

91. *Cas où le vase se vide.* — Pour simplifier le calcul et me borner au cas que l'on trouve dans les traités d'hydraulique, je supposerai que l'axe est une ligne droite verticale et que la section du tuyau (toujours supposée très petite, il ne faut pas l'oublier) est constante entre les deux orifices extrêmes auxquels nous conserverons, pour le moment, leurs valeurs distinctes ω_0 et ω_1. On aura, dans ces hypothèses, $\omega' = \omega$

$$B = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\omega} = \frac{\zeta_1}{\omega_1},$$

et l'équation (γ_1) devient

$$(\gamma_{1b}) \qquad V_1^2\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) + 2\omega_1 \frac{dV_1}{dt}\zeta_1 - 2g\left(\zeta_1 + \frac{p_0 - p_1}{\pi}\right) = 0.$$

Pour arriver immédiatement par cette équation aux formules que l'on trouve dans les traités d'hydraulique pour l'écoulement dans un vase qui se vide, nous supposerons les z comptés de bas en haut à partir de l'orifice de sortie; de sorte que l'on aurait, en regardant maintenant ζ_1 comme variable, puisque le vase se vide, pour expression de la vitesse V_0 dans la section supérieure mobile,

$$V_0 = -\frac{d\zeta_1}{dt},$$

mais l'équation de continuité donnerait

$$V_0\omega_0 = V_1\omega_1,$$

d'où

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = -V_1\frac{\omega_1}{\omega_0};$$

on a, d'ailleurs,

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1}{d\zeta_1}\cdot\frac{d\zeta_1}{dt} = -\frac{\omega_1}{\omega_0}V_1\frac{dV_1}{d\zeta_1}.$$

Substituant cette valeur de $\frac{dV_1}{dt}$ dans l'équation (γ_{1b}), il vient, en remarquant, d'ailleurs, que $V_1\frac{dV_1}{d\zeta_1}$ peut s'écrire $d\frac{(V_1^2)}{d\zeta_1}$,

$$V_1^2\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\zeta_1\frac{d(V_1^2)}{d\zeta_1} = 2g\left(\zeta_1 + \frac{p_0 - p_1}{\pi}\right);$$

cette équation est une équation différentielle linéaire en V_1^2, et, si l'on pose

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} - 1 = m,$$

son intégrale est, comme l'a déterminée M. Resal avec d'autres notations, dans son cours de mécanique,

$$V_1^2 = Me^m + \frac{2g\left(\zeta + \frac{p_0 - p_1}{\pi}\right)}{1 - 2\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}},$$

M étant une constante que l'on déterminerait par la condition que $V_1 = 0$ pour $\zeta_1 = \zeta_0$, ζ_0 étant la hauteur du niveau supérieur au-dessus du centre de l'orifice de sortie, ou plutôt de l'intersection de l'axe des s avec le plan de cet orifice.

De l'équation établie plus haut

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = -V_1 \frac{\omega_1}{\omega_0}$$

on tire

$$dt = -\frac{\omega_0}{\omega_1}\frac{d\zeta_1}{V_1},$$

d'où

$$t = -\frac{\omega_0}{\omega_1}\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{d\zeta_1}{V_1},$$

pour le temps que le fluide mettra pour descendre de la hauteur ζ_0 à la hauteur ζ_1 au-dessus du centre de l'orifice, et pour $\zeta_1 = 0$ cette formule donnera le temps qu'il faudra au vase pour se vider entièrement.

Si l'on supposait, d'ailleurs, que l'orifice de sortie ω_1 fût très petit par rapport à la section courante du tuyau, supposée constante comme tout à l'heure, on peut, dans l'équation (γ_{14}), négliger, comme infiniment petit du second ordre, le terme $2\omega_1 \frac{dV_1\zeta_1}{dt}$, et elle devient

$$V_1^2\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) = 2g\left(\zeta_1 + \frac{p_0 - p_1}{\pi}\right),$$

d'où l'on tire

$$(\gamma_{15}) \qquad V_1 = \sqrt{\frac{2g\left(\zeta_1 + \frac{p_0 - p_1}{\pi}\right)}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}},$$

expression qui n'est autre chose que l'expression (γ_7) trouvée plus haut pour

le cas du niveau supérieur constant ou du vase constamment plein. Si l'on supposait d'ailleurs $p_1 = p_0$, et que ω_1 fût assez petit par rapport à ω_0, cette expression se réduirait à

$$V_1 = \sqrt{2g\zeta_1},$$

soit la vitesse qu'acquerrait un corps solide pesant qui tomberait de la hauteur ζ_1.

On peut donc, lorsque la section de l'orifice de sortie est très petite par rapport à la section du vase, calculer, à chaque instant du mouvement de la colonne fluide, et cela que le vase reste plein ou qu'il se vide, la vitesse comme s'il s'agissait de la chute d'un corps grave, tombant d'une hauteur égale à la hauteur du niveau supérieur au-dessus du centre de l'orifice. C'est là une première approximation dont on se contente dans la pratique, parce qu'elle simplifie considérablement tous les calculs, et qu'il a d'ailleurs été démontré par l'expérience qu'elle était suffisante.

92. *Principe de Toricelli.* — Les expériences célèbres faites par Toricelli, à peu près à l'époque où Galilée, son illustre maître, avait trouvé la loi de la chute des corps graves, ont établi que, si *dans la paroi d'un réservoir plein d'eau on ouvre un orifice très petit, la vitesse de l'eau à la sortie de cet orifice est la même que celle qu'acquerrait un corps grave tombant d'une hauteur égale à celle où se trouve le niveau de l'eau dans le réservoir au-dessus de ce petit orifice.* Les résultats de l'analyse qui précède étant absolument d'accord avec ceux de ces expériences, il en résulte que le degré d'approximation qui a permis d'y arriver doit être regardé comme suffisant, ainsi que je l'ai dit à la fin du numéro précédent.

93. *Expression du temps que le vase met à se vider.* — Si nous reprenons maintenant l'expression donnée plus haut pour le temps que le niveau d'un vase qui se vide met à descendre d'une section à une autre, et qui est

$$t = \frac{\omega_0}{\omega_1}\int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{V_1}.$$

elle deviendra, en y substituant pour V_1 la valeur que le principe de Toricelli nous autorise maintenant à lui assigner,

$$(\eta) \qquad t = \frac{2\omega_0}{\omega_1\sqrt{2g}}\left(\sqrt{\zeta_0} - \sqrt{\zeta_1}\right).$$

Cette formule donne le temps qu'il faudra au niveau pour baisser de la hauteur ζ_0 à la hauteur ζ_1 au-dessus du centre de l'orifice, et le temps qu'il faudrait au vase pour se vider s'obtiendra en faisant dans cette formule $\zeta_1 = 0$, ce qui donne

$$(\eta_1) \qquad t = \frac{2\omega_0}{\omega_1}\sqrt{\frac{\zeta_0}{2g}}.$$

Si le vase était entretenu constamment plein, le temps nécessaire pour écouler le volume $\omega_0\zeta_0$ serait

$$\frac{\omega_0}{\omega_1}\sqrt{\frac{\zeta_0}{2g}}.$$

On aurait, en effet, $\omega_1 V_1 t$ pour le volume passant dans la section ω_1 dans le temps t, et, puisque ce volume est aussi représenté par $\omega_0\zeta_0$, on aurait

$$\omega_1 V_1 t = \omega_0 \zeta_0,$$

d'où, puisqu'ici $V_1 = \sqrt{2g\zeta_0}$, on tirerait

$$t = \frac{\omega_0}{\omega_1}\sqrt{\frac{\zeta_0}{2g}},$$

valeur moitié de la valeur (η_1), d'où résulte que *le temps qu'il faudrait pour vider un vase contenant un volume déterminé de fluide est le double du temps qu'il faudrait pour écouler le même volume si le niveau supérieur était maintenu constant.*

Je ferai remarquer enfin que, si l'orifice de sortie avait même section que le reste du tuyau, et si l'on avait en même temps $p_1 = p_0$, l'équation (γ_{14}) deviendrait

$$\frac{dV_1}{dt} = g,$$

d'où

$$V_1 = gt,$$

et nous retombons ainsi sur la formule déjà trouvée pour ce cas particulier lorsque le niveau supérieur reste invariable; ainsi, *lorsque la section est constante, l'écoulement se fait d'après la loi de la chute des corps solides pesants.*

94. *Du mouvement permanent.* — J'ai déjà dit, au numéro 90, quelques mots du mouvement permanent; il s'agit maintenant d'étudier d'une manière complète ce mouvement, qui a été pendant longtemps l'unique base de l'hydraulique.

Le mouvement d'un fluide est permanent lorsque la vitesse de toutes les molécules qui passent successivement par un point déterminé de l'espace est, en ce point, constante en grandeur et en direction, et c'est à ce mouvement qu'il faut faire remonter l'expression de filet fluide. Dans ce mouvement, un filet est, en effet, composé de toutes les molécules, qui, à un instant donné, se trouvent toutes sur une même trajectoire, et c'est cette trajectoire elle-même qui constitue le filet.

Dans le mouvement permanent, toutes les variables sont indépendantes du temps; de sorte que, dans les équations générales (E_2) du numéro 83, il suffit de faire

$$\frac{du}{dt}=0,$$

$$\frac{dv}{dt}=0,$$

$$\frac{dw}{dt}=0,$$

et elles deviennent

$$\frac{dp}{dx}=\rho\left(X-u\frac{du}{dx}-v\frac{du}{dy}-w\frac{du}{dz}\right),$$

$$\frac{dp}{dy}=\rho\left(Y-u\frac{dv}{dx}-v\frac{dv}{dy}-v\frac{dv}{dz}\right),$$

$$\frac{dp}{dz}=\rho\left(Z-u\frac{dw}{dx}-v\frac{dw}{dy}-v\frac{dw}{dz}\right).$$

Si l'on multiplie ces équations respectivement par dx, dy, dz et qu'on les ajoute, et si l'on désigne, d'ailleurs, par dp la différentielle totale $\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz$, on arrive facilement à l'expression

$$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)-\rho\frac{1}{2}d(u^2+v^2+w^2).$$

Si l'on considère maintenant isolément un filet fluide et que V soit la vitesse sur cette trajectoire, on aura

$$V^2=u^2+v^2+w^2,$$

et l'équation précédente prendra la forme très simple

$$(F'')\qquad dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)-\rho\frac{d(V^2)}{g},$$

équation qui se déduirait d'ailleurs immédiatement de l'équation (F_1) du numéro 86 en y faisant, pour exprimer la permanence du mouvement,

$$\frac{dp}{dt} = 0.$$

S'il y avait un potentiel, on aurait

$$d\Phi = Xdx + Ydy + Zdz,$$

et elle pourrait se mettre alors sous la forme encore plus simple qui suit :

$$(F^{v}) \qquad dp = \rho d\Phi - \rho \frac{d(V^2)}{2}.$$

Cette équation se déduirait d'ailleurs immédiatement de l'équation (F^{vi}) du numéro 86 *bis*, en faisant dans celle-ci $\frac{dV}{dt} = 0$, pour exprimer que le mouvement est permanent.

A l'équation (F^{vi}) ou (F^{v}) il faut toujours joindre l'équation de continuité (R'), qui, en y faisant $\frac{d\rho}{dt} = 0$, pour exprimer la permanence du mouvement, se réduirait à

$$(\beta) \qquad d\left(\frac{\rho\omega V}{ds}\right) = 0,$$

et le système des équations (F^{vi}) ou (F^{v}) et (β) servira à déterminer la vitesse et la pression en un point quelconque du filet fluide.

95. *Application à un fluide pesant.* — S'il s'agit d'un fluide pesant, comme le sont tous les fluides naturels, et l'eau en particulier, on aura

$$X = 0,$$
$$Y = 0,$$
$$Z = g,$$
$$d\Phi = gdz,$$

et l'équation (F^{vi}) devient

$$(\alpha') \qquad dp = \rho\left(gdz - \tfrac{1}{2}dV^2\right),$$

qui peut s'écrire ainsi qu'il suit :

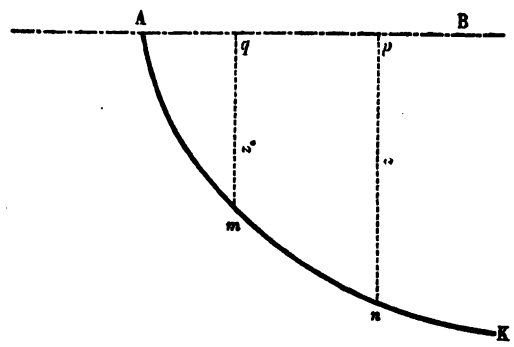
$$dz - \frac{dp}{\rho g} = \frac{VdV}{g},$$

ou bien encore, si π représente le poids de l'unité de volume,

$$(\alpha') \qquad \frac{VdV}{g} = dz - \frac{dp}{\pi}.$$

Soit A*mn*K le faisceau de filets fluides (fig. 24), de section transversale très petite, pour lequel l'ordonnée initiale *mq*, au-dessous du plan horizontal AB, est représentée par z_0, la valeur s_0 de l'arc s qui correspond à cette position initiale est représentée par la partie de courbe A*m* mesurée sur l'axe du filet, z étant l'ordonnée *pn* d'un point quelconque *n* du filet au-dessous du plan horizontal AB, l'arc qui correspond à ce point étant représenté sur la figure par la courbe A*mn*, les s étant comptés à partir du point A.

Fig. 24.



L'équation (α') s'applique à tous les points du faisceau de filets indiqué sur la figure. Si le fluide est incompressible, comme on l'admet lorsqu'il s'agit de l'eau, π devient constant et l'équation (α') peut immédiatement s'intégrer. En désignant par V_0 et p_0 les valeurs de la vitesse et de la pression qui s'appliquent au point *m*, donné par les valeurs initiales s_0 de s et z_0 de z, on aura, par cette intégration,

$$(\delta) \qquad \frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z - z_0 - \left(\frac{p - p_0}{\pi}\right),$$

et l'équation de continuité (β) deviendra, ρ étant constant,

$$(\beta') \qquad \frac{d(\omega V)}{ds} = 0;$$

d'où, en intégrant et en désignant par ω_0 l'aire de la section normale du faisceau sur le point *m*,

$$(\beta_1) \qquad \omega V = \omega_0 V_0.$$

Le produit ωV de l'aire de la section normale par la vitesse est le *débit par seconde* ou *la dépense* du faisceau de filets fluides (toujours de section très petite) que nous considérons, et l'équation (β_1) démontre que ce débit est

constant, ce qui entraîne cette loi que *les vitesses sont en raison inverse des aires des sections.*

L'équation (β_1) donnera la valeur de V, qui sera

$$V = \frac{\omega_0 V_0}{\omega},$$

et en la substituant dans l'équation (δ) celle-ci donnera la valeur de p, qui serait

$$p = p_0 + \pi\left(z - z_0\right) - \frac{\pi V_0^2}{2g}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right).$$

Cette équation, la figure des faisceaux de filets étant donnée, fournira immédiatement la valeur de l'intensité de la pression dans une section quelconque ω du faisceau situé à la hauteur z au-dessous du plan horizontal AB (fig. 24).

On peut arriver directement à l'équation (δ) au moyen du principe des forces vives et en considérant le mouvement comme ayant lieu dans l'hypothèse du parallélisme des tranches. Le système serait assimilable à celui d'une tranche solide infiniment mince et qui pourrait s'étendre ou se resserrer de manière à satisfaire constamment à la section normale du faisceau de filets fluides considéré. La masse de cette tranche serait $\frac{\pi\omega ds}{g}$ et sa force vive $\frac{\pi\omega ds}{g}V^2$. Le travail élémentaire de la gravité pendant le temps dt aurait pour expression $\pi\omega ds.dz$ et le travail élémentaire des pressions $-\frac{\omega dp}{ds}ds$, attendu que les pressions latérales ou exercées perpendiculairement au chemin parcouru ds ne donneraient aucun travail.

Le travail de la gravité, pendant que la tranche descend de l'ordonnée initiale z_0 à l'ordonnée quelconque z au-dessous du plan horizontal à partir duquel sont comptés les z, vaudrait donc $\pi\omega ds(z - z_0)$, et celui des pressions, $-\omega ds(p - p_0)$. Si l'on désigne par V_0 la valeur de V qui correspond à z_0, le principe des forces vives du numéro 38 donnera immédiatement, en divisant les deux membres de l'équation à laquelle il conduit par $\pi\omega ds$,

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z - z_0 - \left(\frac{p - p_0}{\pi}\right),$$

ce qui reproduit bien l'équation (δ), à laquelle nous étions arrivé indépendamment de l'hypothèse du parallélisme des tranches, qui devient nécessaire lorsqu'on veut appliquer le principe des forces vives, comme l'ont fait la plupart des anciens auteurs.

Il faut remarquer maintenant que tout ce qui vient d'être dit pour notre

faisceau de filets fluides de section très petite s'appliquerait tout aussi bien à un liquide contenu dans un tuyau dont la forme serait exactement celle du faisceau, à la seule condition qu'il n'y eût aucun frottement du fluide sur les parois du tuyau, ou bien dans un canal découvert, sous cette même condition d'absence de frottement à la paroi. Seulement, dans ce dernier cas, la pression à la surface libre serait nécessairement constante et égale à la pression atmosphérique. Il faudrait, dès lors, satisfaire à la condition

$$dp = 0,$$

qui donnerait

$$p - p_0 = 0.$$

et l'équation (δ) deviendrait

$$(\delta') \qquad \frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z - z_0,$$

équation qui reproduit identiquement l'équation (40) du numéro 54 relative au mouvement d'un point matériel pesant sur une courbe. Cette équation montre que la vitesse, absolument indépendante de la voie cinématique suivie entre les points z_0 et z, ne dépend que de la hauteur relative de ces deux points au-dessous d'un plan horizontal ou de leur différence de niveau; d'où résulte que l'équation (δ') s'appliquerait, non seulement à un même filet, mais encore à des filets quelconques contigus à la surface libre.

Si le fluide était élastique et qu'il s'agît, par exemple, d'un gaz dit *permanent*, on pourrait, la température étant supposée constante, poser

$$\pi = \frac{p}{K},$$

puisque, dans ce cas, la densité est proportionnelle à la pression, et l'équation (α') deviendrait

$$K\frac{dp}{p} = dz\frac{VdV}{g}.$$

En intégrant et en déterminant la constante d'après les valeurs initiales z_0, V_0, p_0 et z, V, p, on en déduirait

$$(\delta') \qquad \frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z - z_0 - K(\log p - \log p_0),$$

équation qui ne diffère de l'équation (δ), relative aux fluides incompressibles, qu'en ce que les pressions sont remplacées par leurs logarithmes multipliés par le coefficient K.

L'équation de continuité (β), pour le cas d'un fluide élastique qui nous occupe maintenant, peut d'ailleurs s'écrire

$$\frac{1}{g}\frac{d\cdot\pi\omega V}{ds}=0,$$

qui, par l'intégration, donnerait

$$(\beta_2) \qquad \pi\omega V=\pi_0\omega_0 V_0,$$

d'où l'on tirerait

$$V=\frac{\pi_0\omega_0 V_0}{\pi\omega},$$

et, en substituant cette valeur de V dans l'équation (δ), celle-ci donnerait p.

La comparaison des équations (β_1), (β_2) montre tout de suite en quoi diffère le mouvement permanent d'un fluide suivant qu'il est incompressible ou élastique, ou, pour préciser, suivant qu'il s'agit de l'eau ou d'un gaz. Dans le premier cas, c'est l'équation (β_1) qui s'applique, et le caractère du mouvement est celui du débit constant en volume (ωV). Dans le second, auquel s'applique l'équation (β_2), ce n'est plus le volume débité dans l'unité de temps qui reste constant, mais bien le poids $\pi\omega$V de ce volume. *La dépense constante en volume ou en poids caractérise donc le mouvement permanent des fluides homogènes suivant qu'ils sont incompressibles ou élastiques.*

Ce n'est du reste que pour établir, en passant, cette distinction essentielle que je me suis occupé ici des fluides élastiques, absolument étrangers à l'hydraulique, comprise comme je l'entends et comme je l'ai expliquée dans ma préface.

96. *Principe de D. Bernoulli.* — L'équation (δ) peut se mettre sous la forme

$$(\delta) \qquad \frac{p}{\pi}+\frac{V^2}{2g}-z=\frac{p_0}{\pi}+\frac{V_0^2}{2g}-z_0,$$

ou, si l'on pose $z-z_0=\zeta$,

$$(\delta_1) \qquad \frac{p}{\pi}+\frac{V^2}{2g}-\zeta=\frac{p_0}{\pi}+\frac{V_0^2}{2g},$$

ou, plus généralement,

$$(\delta_1) \qquad \frac{p}{\pi}+\frac{V^2}{2g}-\zeta=\text{const.},$$

relation qui pourrait se déduire aussi de l'équation (F_1) donnée au numéro 86,

car celle-ci pour $Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi$ et pour $\frac{dp}{dt} = 0$, qui convient au mouvement permanent, deviendrait

$$d\left[\int \frac{dp}{\rho} - \Phi + \frac{V^2}{2}\right] = 0$$

ou

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - \Phi = \text{const.};$$

mais, puisque $\pi = \rho g$ et que l'on aurait ici $\Phi = g\zeta$, l'équation précédente devient

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\pi} - \zeta = \text{const.}$$

La relation (δ_1) s'applique sur toute l'étendue d'un même filet fluide; elle est la loi du mouvement permanent dans ce filet. On remarquera, d'ailleurs, que $\frac{V^2}{2g}$ représente la demi-force vive ou *l'énergie actuelle* d'un poids du fluide égal à l'unité, et que $\frac{p}{\pi} - \zeta$ équivaut à une certaine élévation du même poids ou de son *énergie potentielle*. L'équation (δ_1) établit donc ce principe important que, *dans le mouvement permanent, la somme de l'énergie actuelle et de l'énergie potentielle ou l'énergie totale*[1] *reste constante tout le long d'un même filet fluide.* Le principe de la conservation de l'énergie se vérifie donc dans le mouvement permanent, non seulement pour toute la masse, à laquelle il s'applique dans tous les autres cas, mais aussi pour toutes les parties de cette masse.

Si nous supposons maintenant qu'on ait

$$p_0 = 0, \qquad V_0 = 0,$$

l'équation précédente devient

$$\frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g} - \zeta = 0,$$

et ζ est la *charge hydrostatique* sur le point dont z est l'ordonnée; on déduit de là

$$\frac{p}{\pi} = \zeta - \frac{V^2}{2g};$$

cette équation exprime que, *en un point quelconque d'un filet fluide, la hauteur représentative de la pression est égale à la charge hydrostatique sur ce point, diminuée de la hauteur due à la vitesse en ce même point.*

[1] Voir le numéro 43, en ce qui concerne les énergies.

Tel est l'énoncé du principe de D. Bernoulli, tel qu'il l'a donné dans son *Hydrodynamica*, section XII. On voit qu'il n'est qu'un cas particulier de la loi plus générale déduite tout à l'heure de l'équation (δ_1).

97. *Valeur de la pression hydrodynamique.* — On tirerait de l'équation (δ)

$$p = p_0 + \pi(z - z_0) - \left(\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g}\right).$$

$p_0 + \pi(z - z_0)$ est la valeur de la pression hydrostatique donnée par l'équation (h) du numéro 75; si l'on fait $V_0 = 0$ dans l'équation précédente, elle devient

$$p = p_0 + \pi(z - z_0) - \frac{V^2}{2g},$$

d'où résulte que, *dans le mouvement permanent, la pression hydrodynamique en un point quelconque d'un filet fluide est égale à la pression hydrostatique en ce point, diminuée de la hauteur due à la vitesse en ce même point.*

On remarquera maintenant que l'équation (δ) peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\left(\frac{p}{\pi} - \frac{p_0}{\pi}\right) + \left(\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g}\right) = z - z_0,$$

et, si l'on pose

$$\frac{p}{\pi} - \frac{p_0}{\pi} = \lambda,$$

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = \mu,$$

$$z - z_0 = \zeta,$$

on arrive à la forme (δ'), la plus simple de l'équation du mouvement permanent,

$$(\delta') \qquad \lambda + \mu = \zeta.$$

On déduit immédiatement de cette équation le théorème suivant :

Entre deux points quelconques d'un filet fluide incompressible en mouvement permanent, la différence des hauteurs dues aux vitesses en ces points, augmentée de la différence des hauteurs représentatives des pressions en ces mêmes points, donne une somme qui est toujours égale à la différence de niveau des deux points.

On remarquera maintenant que μ et λ représentent des transformations[1]

[1] Je me sers du mot *transformation* pour réserver, suivant l'usage, le mot *perte de charge* pour les déperditions dues aux frottements, dont il est fait abstraction ici. Dans le mouvement, une partie de la charge motrice se transforme soit en force vive, soit en pression, et c'est de cette déperdition spéciale que j'entends parler.

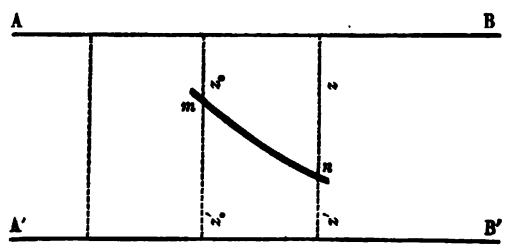
de charge dues à l'accroissement de la vitesse et de la pression; ce sont comme les pertes de charge dues au mouvement même. On peut donc dire que *la charge hydrostatique entre deux sections d'un filet fluide en mouvement permanent fait constamment équilibre à la somme de toutes les transformations de charge dues au mouvement entre les deux sections.*

Si l'on suppose, d'ailleurs, $z_0 = 0$, c'est-à-dire que le plan horizontal AB de la figure 24 soit le plan de niveau de la surface libre du fluide, ζ représentera la charge hydrostatique sur un point quelconque situé à cette profondeur, et l'équation (δ) montre dès lors qu'en un point quelconque de la masse fluide *la somme des transformations de charge dues à la vitesse et à la pression est constamment égale à la charge hydrostatique sur ce point.*

Ce sont là des caractères remarquables du mouvement permanent *abstrait* que nous traitons ici, c'est-à-dire dans lequel il est fait abstraction de tout frottement soit extérieur, soit intérieur.

98. *Plans de charge hydrostatique et hydrodynamique.* — Supposons qu'au lieu de compter les z de haut en bas à partir d'un plan horizontal supérieur AB (fig. 25), comme on l'a fait jusqu'ici, on les compte de bas en haut à partir d'un plan horizontal inférieur A'B' (fig. 25). Si B est la distance entre les plans AB et A'B', et si z est l'ordonnée au-dessous du plan AB, z' étant l'ordonnée correspondante au-dessus du plan A'B', on aura

Fig. 25.



$$z + z' = B,$$
$$z_0 + z_0' = B,$$

et l'équation (δ) deviendra

$$(\delta_2) \qquad \frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g} + z' = \frac{p_0}{\pi} + \frac{V_0^2}{2g} + z_0'.$$

Si l'on ajoute à l'ordonnée d'un point quelconque du filet comptée au-dessus d'un plan horizontal inférieur les hauteurs représentatives de la pression et de la vitesse en ce point, la somme de ces trois hauteurs est constante tout le long du filet et détermine ainsi un plan horizontal, auquel on a donné le nom de *plan de charge hydrodynamique.*

Si l'on annule, d'ailleurs, les vitesses dans l'équation (δ_2), on aura, pour le *plan de charge hydrostatique*, la relation

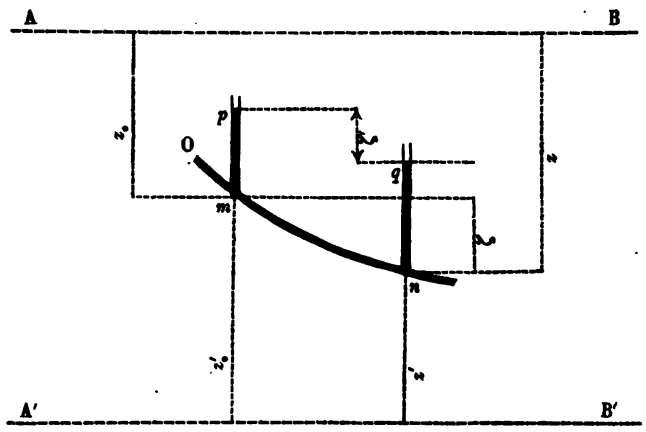
$$\frac{p}{\pi}+z'=\frac{p_0}{\pi}+z'_0.$$

Les deux plans sont, comme on le voit en comparant les deux équations, distants d'une quantité égale à $\frac{V^2}{2g}-\frac{V_0^2}{2g}$ ou à la transformation de charge résultant de l'état de mouvement considéré par rapport à l'état d'équilibre.

99. *Piézomètres*[1]. — La hauteur $\frac{p}{\pi}$ représentative de la pression se nomme hauteur piézométrique.

Afin de bien faire comprendre le sens qu'il faut attacher à cette expression, supposons (fig. 25 *bis*) qu'en un point n du filet fluide mn, dont nous exagé-

Fig. 25 *bis*.



rons un instant les dimensions, on insère un tube vertical ouvert à ses deux bouts et terminé inférieurement de manière à ne pas changer la courbure du filet mn; la hauteur nq, à laquelle s'élèvera l'eau dans ce tube, sera la mesure de la pression en n, abstraction faite de la pression atmosphérique, qui se fait équilibre, puisqu'elle agit en q et en o, et l'on aura dès lors

$$nq=\frac{p}{\pi}.$$

Si donc le tube est gradué, nous aurons là un *piézomètre* dont les indications

[1] Πίεσις «pression» et μέτρον «mesure».

nous donneront immédiatement les pressions d'un fluide en mouvement, comme le baromètre nous donne celles d'un fluide en équilibre.

Si nous plaçons maintenant un second piézomètre en un autre point m, la hauteur représentative de la pression en ce point sera

$$mp = \frac{p_0}{\pi};$$

les altitudes des points p et q au-dessus du plan horizontal A'B' sont $z'_0 + \frac{p_0}{\pi}$ et $z' + \frac{p}{\pi}$ et, si l'on pose

$$z'^0 + \frac{p_0}{\pi} - \left(z' + \frac{p}{\pi}\right) = \zeta',$$

l'équation (δ_2) s'écrira ainsi qu'il suit :

$$(\delta_3) \qquad \frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = \zeta',$$

ce qui conduit au théorème suivant :

La différence des hauteurs dues aux vitesses en deux points d'un filet fluide incompressible et pesant, en mouvement permanent, est égale à la différence de niveau des deux colonnes piézométriques correspondantes.

Dans le cas de l'équilibre, on aurait, ainsi qu'il est facile de le voir d'après ce qui a été dit au numéro 76, ou bien en faisant dans l'équation (δ_3) $\zeta' = 0$,

$$\frac{p}{\pi} - \frac{p_0}{\pi} = z'_0 - z',$$

et, si ζ désigne toujours la différence de niveau des points m et n,

$$\frac{p}{\pi} - \frac{p_0}{\pi} = \zeta.$$

Il y a ici une certaine analogie à faire ressortir entre les deux cas de l'équilibre et du mouvement : dans le premier cas, la différence des hauteurs représentatives des pressions en deux points est égale à la différence de leurs niveaux barométriques, et, dans le second, la différence des hauteurs dues aux vitesses est égale à la différence de leurs niveaux piézométriques.

L'équation (δ_3) permettrait de déterminer expérimentalement la vitesse V, puisque ζ' représente une différence de niveau que l'observation des deux piézomètres donnerait immédiatement. Il suffirait, pour cela, de joindre à l'équation (δ_3) l'équation de continuité qui donnerait

$$V_0 = \frac{\omega V}{\omega_0},$$

et l'équation (δ_3) deviendrait

$$\frac{V^2}{2g}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)=\zeta',$$

d'où l'on déduirait immédiatement la valeur de V, qui ne serait autre, en définitive, que la valeur (γ_{15}), qui a été déterminée au numéro 91.

Mais l'usage du piézomètre pour la détermination de la vitesse ne peut donner que des indications approximatives et non des résultats exacts, à cause des perturbations de mouvement que cause la présence dans le courant fluide d'un obstacle comme le tube piézométrique, quelque faible que puisse être, d'ailleurs, son diamètre par rapport à celui du courant.

Je ferai remarquer maintenant que, si le mouvement devenait uniforme ou si le fluide était en équilibre, on aurait, dans le premier cas,

$$V=V_0,$$

et, dans le second,

$$V=0, \qquad V_0=0,$$

et, dans l'un comme dans l'autre des deux cas, l'équation (δ_3) se réduirait à

$$\zeta'=0.$$

La dénivellation piézométrique s'annule donc, et le fluide se mettra de niveau dans tous les tubes piézométriques, ce qui fait retomber, comme on devait s'y attendre, sur les propriétés des vases communiquants exposées au numéro 77.

100. *Vitesse moyenne.* — *Débit.* — Dans tout ce qui précède on a supposé que la vitesse des molécules traversant une même section, normale à l'axe du courant, était la même pour tous les points de cette section. Cette hypothèse ne peut s'admettre que pour le cas où l'aire de la section est très petite, et où sa forme ne change que graduellement et par évasement régulier d'une section à l'autre, de manière que la direction des filets ne puisse subir aucune perturbation brusque qui viendrait modifier les lois du mouvement. Il faut donc admettre une section normale très petite, et ne pouvant varier que d'après une loi de continuité telle que le parallélisme des filets subsiste, au moins à très peu près, dans chaque section. Ces hypothèses, que l'on est obligé de faire pour arriver à l'équation du mouvement permanent, sont, il faut bien le dire, de pures abstractions, comme celles que l'on admet en mécanique lorsque l'on considère les solides comme absolument indéformables. Il est évi-

dent, en effet, que, si l'on considère un ensemble de filets élémentaires traversant une section de courant fluide, les vitesses aux points d'intersection seront toutes différentes; mais il y a, parmi toutes ces vitesses, une vitesse telle, qu'en supposant que toutes les autres lui soient égales, le volume passant par la section transversale du courant dans l'unité de temps resterait le même que le volume réellement débité, et qui serait la somme de tous les volumes élémentaires débités par les divers filets traversant la section avec leurs vitesses réelles. Cette vitesse se nomme la *vitesse moyenne*.

Si Ω est l'aire de la section transversale du courant liquide, U la vitesse moyenne de cette section, on aura pour son expression, d'après la définition qui vient d'en être donnée,

$$U = \int_\Omega \frac{V d\Omega}{\Omega},$$

et la dépense Q, ou le débit par seconde du courant, sera

$$Q = \Omega U.$$

Le courant fluide de section Ω peut, d'ailleurs, si l'on veut éviter ici l'opération de l'intégration, être considéré comme composé d'un nombre fini de faisceaux de filets fluides de section assez petite, et si ω est l'aire de la section d'un de ces faisceaux, V la vitesse sur le filet dans cette section, on aurait $\Omega = \Sigma\omega$, et l'on pourrait poser dès lors

$$U = \frac{\Sigma\omega V}{\Sigma\omega},$$

d'où l'on déduirait

$$Q = \Sigma\omega V,$$

ou bien encore, si q est le débit de la section d'un filet,

$$Q = \Sigma q.$$

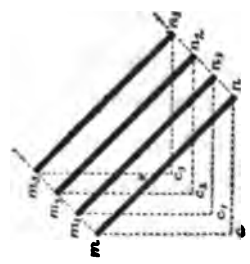
101. *Application de l'équation* (δ) *du numéro* 95 *au cas d'un courant fluide de section quelconque.* — Si l'on considère le courant comme composé de filets indépendants et qu'on lui applique le principe des forces vives, on arrivera facilement à l'équation suivante :

$$\Sigma \frac{\pi\omega ds}{g}\left(\frac{V^2 - V_0^2}{2}\right) = \Sigma\pi\omega ds\left(z - z_0\right) - \Sigma\omega ds\left(p - p_0\right).$$

Considérons maintenant (fig. 26) un faisceau de filets parallèles et rectilignes,

que, pour bien me faire comprendre, je représente en gros traits pleins sur la figure et séparés entre eux, quoique, en réalité, ils soient contigus, et, pour simplifier la figure, je suppose les quatre filets mn, m_1n_1, m_2n_2, m_3n_3, situés dans un même plan; le faisceau de filets est d'ailleurs coupé par deux plans mm_3 et nn_3, perpendiculaires à son axe, qui déterminent deux sections transversales de ce faisceau. Il est clair, d'après la seule inspection de la figure, que $z-z_0$ ou la différence de niveau des points où ces sections coupent les axes de filets élémentaires du faisceau reste la même pour tous les filets. Il en serait de même de la différence des pressions $p-p_0$, en admettant que la pression varie hydrostatiquement aux divers points d'une même section normale, ce qui est exact, comme on le verra plus loin (n° 113) et, par suite, vu l'équation (δ_1) du numéro 96, il en sera de même aussi de $V^2-V_0^2$. L'équation précédente pourra dès lors s'écrire ainsi qu'il suit :

Fig. 26.



$$\left(V^2-V_0\right)^2 \Sigma \frac{\pi\omega ds}{g} = \left(z-z_0\right) \Sigma\pi\omega ds - \left(p-p_0\right) \Sigma\omega ds,$$

ou, divisant les deux membres par $\Sigma\pi\omega ds$,

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z - z_0 - \frac{(p-p_0)}{\pi},$$

équation qui reproduit exactement l'équation (δ) donnée au numéro 95 pour un filet individuel. Cette équation s'applique donc, dans le cas particulier où tous les filets sont rectilignes et parallèles, aussi bien à un courant de section quelconque qu'à un filet de section très petite.

Lorsque les filets ne sont plus rectilignes et parallèles, la vitesse varie d'un filet à l'autre dans la même section, mais il s'établit une vitesse moyenne du système de tous ces filets qui différera d'autant moins de chacune des vitesses individuelles que la direction des filets tendra davantage vers le parallélisme. On pourra substituer, à une première approximation, cette vitesse moyenne U aux vitesses V et appliquer encore l'équation (δ) chaque fois que $\Sigma \frac{\pi\omega ds}{g} \frac{(V^2-V_0^2)}{2}$ ne devra pas différer sensiblement de $\frac{U^2-U_0^2}{2} \Sigma \frac{\pi\omega ds}{g}$, $\Sigma\pi\omega ds$ $(z-z_0)$ de $(z-z_0)\Sigma\omega ds$, et $\Sigma\omega ds\,(p-p_0)$ de $(p-p_0)\Sigma\omega ds$.

Il suit de là que, pourvu que les filets soient *sensiblement* rectilignes et parallèles, on pourra, à une première approximation, écrire

$$(\varepsilon) \qquad \frac{U^2}{2g} - \frac{U_0^2}{2g} = z - z_0 - \left(\frac{p-p_0}{\pi}\right).$$

Cette équation s'appliquera à un courant de section quelconque, $z - z_0$ et $\frac{p}{\pi} - \frac{p_0}{\pi}$ représentant la différence de niveau et la différence des hauteurs représentatives des pressions aux points du courant fluide où les sections dans lesquelles les vitesses moyennes sont U et U_0 couperont l'axe du courant.

Le principe de Bernoulli indiqué au numéro 96, ainsi que toutes les conséquences qu'on en a déduites, peuvent donc s'appliquer à un courant de section quelconque par l'introduction des vitesses moyennes, et ce sont, il faut le dire tout de suite, les seules que l'on soit appelé à considérer dans la pratique.

Il est facile de voir, d'ailleurs, que l'équation (ε) peut se mettre, en vertu de l'équation de continuité, qui serait ici $\Omega U = \Omega_0 U_0$, et en posant toujours $z - z_0 = \zeta$, sous la forme suivante :

$$\frac{U^2}{2g}\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2}\right) = \zeta - \frac{(p - p_0)}{\pi},$$

d'où l'on tirerait

$$(\gamma_{16}) \qquad U = \sqrt{\frac{2g\left(\zeta + \frac{(p_0 - p)}{\pi}\right)}{1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2}}},$$

qui, pour la section de sortie (Ω_1, U_1, ζ_1, p_1), deviendrait

$$(\gamma_{17}) \qquad U_1 = \sqrt{\frac{2g\left(\zeta_1 + \frac{(p_0 - p_1)}{\pi}\right)}{1 - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}}}.$$

Cette expression reproduit, aux notations près, l'expression (γ_{15}) du numéro 91, de sorte que le principe de Toricelli, que l'on a déduit de cette dernière pour le cas où la section de l'orifice de sortie est très petite par rapport à celle du vase, très petite elle-même, s'appliquerait encore à un réservoir de section quelconque, et ce serait la vitesse moyenne d'écoulement d'un orifice de section très petite par rapport à celle du réservoir qui aurait $\sqrt{2g\zeta_1}$ pour valeur.

101 *bis*. *Réflexions générales sur le mouvement permanent.* — L'équation (ε) convient au mouvement permanent d'un courant d'eau ou, plus généralement, d'un fluide homogène pesant et incompressible; c'est l'équation fondamentale de laquelle on déduit à peu près toute l'hydraulique abstraite, c'est-à-dire celle qui ne tient aucun compte des frottements et qui est encore aujourd'hui à peu près la seule enseignée.

Nous sommes arrivé à l'équation (ε) par l'hypothèse des filets indépendants, et elle s'applique rigoureusement au cas où ces filets sont rectilignes et parallèles. On y arriverait aussi en étendant à un courant de section quelconque l'hypothèse de l'écoulement par tranches avec conservation du volume, qui n'a été admise au numéro 87 que pour un courant de section très petite, et en appliquant le principe des forces vives, mais aves les vitesses moyennes des tranches. On voit donc que l'hypothèse du parallélisme des tranches permet d'arriver à l'équation du mouvement permanent comme celle des filets indépendants, mais avec un plus grand nombre d'hypothèses accessoires. C'est l'hypothèse de l'écoulement par filets qui prévaut aujourd'hui sur celle de l'écoulement par tranches. Elle se prête mieux au développement des ressources de l'analyse, mais elle est loin d'expliquer encore tous les phénomènes naturels de l'écoulement des eaux dans les canaux et rivières, ainsi qu'on le verra plus loin.

Le caractère essentiel du mouvement permanent résulte, comme on l'a du reste déjà dit au numéro 95, de l'équation de continuité, en vertu de laquelle le débit par seconde du courant liquide reste constant; ce débit est, d'ailleurs, estimé par le produit de l'aire de la section par la vitesse moyenne dans cette section, ainsi que cela a été expliqué au numéro 100; on aurait, en effet, d'après l'équation (β') du numéro 95 pour chaque filet (ω, V) la relation

$$\omega V = \text{const.},$$

d'où

$$\Sigma\omega V = \text{const.};$$

et si U est la vitesse moyenne du courant, dont la section serait $\Omega = \Sigma\omega$, on aurait

$$U = \frac{\Sigma\omega V}{\Sigma\omega} = \frac{\Sigma\omega V}{\Omega},$$

d'où

$$\Omega U = \Sigma\omega V = \text{const.},$$

de sorte que l'équation de continuité s'applique aussi bien à un courant de section Ω avec sa vitesse moyenne U qu'à chacun des faisceaux des filets indépendants de sections très petites qui le composent.

On peut, d'ailleurs, arriver directement à l'équation de continuité pour le cas d'un réservoir de section quelconque, en partant de ce fait, absolument évident, que, *dans le mouvement de l'eau dans un réservoir, le volume qui s'emmagasine dans le réservoir pendant un temps donné est égal à la différence du volume*

qui y entre et de celui qui en sort dans le même temps. Si l'on désigne par W le volume que contient le réservoir au bout du temps t et par q_e, q_s les débits par seconde au bout du même temps d'un quelconque des orifices d'entrée et de sortie de ce réservoir, le volume emmagasiné dans le réservoir pendant le temps dt sera dW, et les volumes débités pendant le même temps par tous les orifices d'entrée et tous les orifices de sortie vaudront $\Sigma q_e dt$ et $\Sigma q_s dt$; de sorte que l'on aura, en vertu de l'axiome énoncé tout à l'heure,

$$dW = \Sigma q_e dt - \Sigma q_s dt,$$

d'où l'on tire

$$\text{(M)} \qquad \frac{dW}{dt} = \Sigma q_e - \Sigma q_s,$$

et cette équation s'applique au mouvement de l'eau dans le réservoir, quelle que soit la nature de ce mouvement, qu'il soit permanent ou non; elle est absolument générale et je la regarde, en ce qui me concerne, comme renfermant à peu près toute l'hydraulique pratique. Je l'avais déjà donnée, quoique sous une forme un peu moins générale, dans mon mémoire sur le mouvement des eaux dans les réservoirs à alimentation variable, inséré au tome XXI des *Savants étrangers.*

Si le mouvement est permanent, on a

$$\frac{dW}{dt} = 0,$$

d'où, par l'équation (M),

$$\Sigma q_e - \Sigma q_s = 0,$$

et, s'il n'y a qu'un seul orifice d'entrée et un seul orifice de sortie, dont les débits soient q_e et q_s,

$$q_e - q_s = 0.$$

Le niveau du réservoir reste donc constant, le débit entrant étant toujours égal au débit sortant, et c'est cette constance du débit qui est le caractère essentiel du mouvement permanent.

L'équation $\Sigma q_e - \Sigma q_s = 0$ peut s'écrire d'une manière générale et sous une forme plus simple encore de la manière suivante :

$$\Sigma q = 0,$$

en convenant de compter comme positifs les débits qui alimentent le réservoir et comme négatifs ceux qui l'appauvrissent.

S'il s'agissait d'un courant d'eau au lieu d'un réservoir, la question resterait la même, et le volume emmagasiné pendant le temps dt dans le petit réservoir formé par la section transversale du courant sur la longueur ds de l'axe du courant normal à cette section serait toujours égal à la différence du volume entré par cette section et de celui qui en serait sorti pendant le même temps. Si q désigne le débit par seconde du cours d'eau sur la section d'abscisse s, $q+\frac{dq}{ds}ds$ sera le débit sur la section d'abscisse $s+ds$, et l'on aurait ici

$$\Sigma q_e = q,$$

$$\Sigma q_s = q + \frac{dq}{ds}ds.$$

On a d'ailleurs évidemment, si W est le volume correspondant à la différence de longueur ds des deux abscisses, $W = \omega ds$ et, par suite,

$$\frac{dW}{dt} = ds \cdot \frac{d\omega}{dt},$$

et, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (M), celle-ci devient

$$\text{(M')} \qquad \frac{d\omega}{dt} + \frac{dq}{ds} = 0.$$

C'est cette forme que prend l'équation de continuité pour les cours d'eau.

Lorsque le mouvement est permanent, on a $\frac{d\omega}{dt} = 0$, et elle donne

$$\frac{dq}{ds} = 0,$$

d'où

$$q = \text{const.},$$

et l'on retombe ainsi sur cette condition du débit constant, essentielle et constitutive du mouvement permanent. On remarquera, d'ailleurs, que la permanence du mouvement entraîne aussi la condition

$$\frac{dq}{dt} = 0,$$

et, si on la joint à la précédente, on voit que le débit n'est pas seulement constant par rapport au temps, mais encore par rapport à sa translation dans

le sens du mouvement. Il reste constant, en effet, quelle que soit la section du courant d'eau que l'on considère sur l'axe des s de ce mouvement.

101 *ter*. *Cas particulier du mouvement uniforme.* — Si le mouvement doit être uniforme, outre les conditions du mouvement permanent en vertu desquelles la vitesse est indépendante du temps et le débit constant, il faut encore que cette vitesse soit constante elle-même dans toute l'étendue du courant. Pour approprier l'équation (e) du numéro 101 à ce nouveau type de mouvement, il faut y faire

$$U = U_0,$$

et elle devient

$$z - z_0 + \frac{p - p_0}{\pi} = 0,$$

d'où l'on tire

$$p = p_0 + \pi(z - z_0),$$

ce qui n'est autre chose que l'expression (h) de la pression hydrostatique donnée au numéro 75.

La condition $U = U_0$, introduite dans l'équation de continuité;

$$\Omega U = \Omega_0 U_0,$$

la transforme dans la suivante :

$$\Omega = \Omega_0.$$

Le mouvement uniforme entraîne donc la condition que la section soit constante, c'est-à-dire de forme absolument invariable dans toute l'étendue du courant.

Si l'on désigne maintenant par P la pression sur la surface Ω d'une section normale quelconque du courant, et par P_0 la pression sur la section supérieure Ω_0 de ce courant, on aura

$$P = p\Omega, \qquad P_0 = p_0\Omega_0 = p_0\Omega,$$

et, si l'on multiplie l'équation trouvée plus haut pour les pressions par Ω, elle devient

$$\Omega p = \Omega p_0 + \Omega\pi(z - z_0),$$

ou

$$P - P_0 = \pi\Omega(z - z_0).$$

On déduit de cette équation *qu'il faut, pour que le mouvement uniforme soit pos-*

sible, que la différence des pressions sur la section inférieure et la section supérieure de la colonne fluide soit égale au poids d'une colonne fluide ayant la même section pour base, et pour hauteur la différence de niveau des deux sections.

Cette condition est évidente et saute aux yeux lorsque l'on considère un vase à section transversale constante et dont l'axe soit une ligne droite verticale, et l'équation que l'on vient d'écrire n'est autre chose que celle de l'équilibre d'une colonne fluide pesante de section constante. On est ainsi ramené à l'une des conséquences générales du mouvement uniforme exposées au numéro 46, c'est que la condition de l'uniformité du mouvement entraîne celle de l'équilibre des forces.

Si nous reprenons d'ailleurs ici l'expression (γ_{17}) de la vitesse de sortie U_1 donnée au numéro 101,

$$U_1 = \sqrt{\frac{2g\left(\zeta_1 + \frac{(p_0 - p_1)}{\pi}\right)}{1 - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}}},$$

les conditions relatives au mouvement uniforme que nous venons d'établir plus haut, et qui seraient ici :

$$p_1 = p_0 + \pi\zeta_1,$$

$$\Omega_1 = \Omega,$$

donnent à cette expression la forme $\frac{0}{0}$. La vitesse resterait donc arbitraire et constamment égale à la vitesse initiale quelconque que l'on aurait imprimée à la colonne fluide.

Le mouvement uniforme d'un courant d'eau sans frottement se caractérise donc par une vitesse constante arbitraire, et la pression en un point quelconque de la masse fluide y est égale à la pression hydrostatique, quelle que soit la valeur de cette vitesse.

102. *Écoulement de l'eau par un orifice ouvert dans la paroi du réservoir.* — Tout ce qui a été dit plus haut suppose que la section d'écoulement ne se modifie que graduellement, de manière que l'on puisse, sans trop grande erreur, admettre dans chaque section le quasi-parallélisme des filets fluides. Pour satisfaire à cette condition, il faudrait que l'orifice de sortie se raccordât par évasement avec la paroi du réservoir, ainsi que l'indique la figure 27, coupe verticale sur l'axe de l'orifice.

Si U_0 est la vitesse moyenne dans la section supérieure AB dont l'aire serait Ω_0, et U_1 la vitesse moyenne dans la section CD de l'orifice de sortie a pour l'aire Ω_1, les intensités des pressions sur ces sections étant p_0 et p_1, on aurait, d'après l'expression (γ_{17}) donnée au numéro 101,

$$U_1 = \sqrt{\frac{2g\left(\zeta_1 + \frac{(p_0 - p_1)}{\pi}\right)}{1 - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}}};$$

mais dans la section AB comme dans la section CD, où la surface libre du fluide conduit à la condition d'une pression constante, et égale ici à la pression atmosphérique p_a, on a

$$p_0 = p_a,$$

$$p_1 = p_a,$$

et l'équation précédente devient

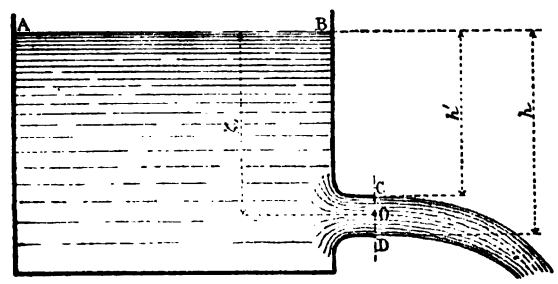
$$U_1 = \sqrt{\frac{2g\zeta_1}{\frac{1 - \Omega_1^2}{\Omega_0}}},$$

et si, comme cela arrive dans tous les grands réservoirs, Ω_1 est très petit par rapport à Ω_0, on a simplement

$$U_1 = \sqrt{2g\zeta_1},$$

et il ne s'agit plus que de savoir comment on déterminera ζ_1, qui est ici, comme on le sait, la différence du niveau entre la surface libre AB et le point O où le filet de la vitesse moyenne rencontre la section CD de l'orifice de sortie. Pour cela il faut tenir compte de la figure ou du dispositif de l'orifice. Supposons, d'abord, que cette figure soit un rectangle, dont la base ait une longueur l. Nous supposons toujours les z comptés de haut en bas à partir du plan AB (fig. 27), et si l'on désigne par h et h' les valeurs de z qui correspondent à la base inférieure, supposée horizontale, du rectangle de l'orifice et à sa base supérieure ou, si l'on veut, les charges

Fig. 27.



sur la base et le sommet de cet orifice, la vitesse moyenne aura, d'après l'expression générale qui en a été donnée au numéro 100, pour valeur

$$U_1 = \frac{\int_{h'}^{h} ldz\sqrt{2gz}}{\int_{h'}^{h} ldz} = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\cdot\frac{h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}}{h-h'}.$$

Si maintenant on désigne par H l'ordonnée du point milieu de la hauteur de l'orifice, qui a ici pour valeur $\frac{h+h'}{2}$, il est facile de voir que l'expression précédente peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$U_1 = K_1\sqrt{2gH},$$

K_1 ayant pour valeur

$$K_1 = \frac{2}{3}\frac{H}{h-h'}\left[\left(1+\frac{h-h'}{2H}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1-\frac{h-h'}{2H}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Or, lorsque H est assez grand par rapport à $h-h'$, qui n'est autre chose que la hauteur de l'orifice, pour que le terme $\frac{h-h'}{2H}$ s'approche de zéro, la valeur de K_1 s'approchera de l'unité, et l'on pourra écrire

$$U_1 = \sqrt{2gH},$$

et la valeur à prendre pour ζ_1 est dès lors la hauteur H du milieu de la hauteur d'orifice au-dessous du niveau supérieur du réservoir; de sorte que *la vitesse moyenne dans la section de l'orifice ne serait autre chose que la vitesse due à la charge sur le milieu de la hauteur de cette section.*

Mais si cette règle si simple est d'une exactitude suffisante pour le cas où la charge est très grande par rapport à la hauteur de l'orifice, il n'en serait plus de même dans les autres cas, et il faudrait alors calculer la valeur numérique de K_1 pour chaque cas particulier et multiplier chaque fois $\sqrt{2gH}$ par cette valeur pour avoir la véritable valeur de la vitesse moyenne.

Si l'on suppose la section de l'orifice circulaire, et si H désigne toujours la charge sur le milieu de sa hauteur, qui est ici le centre du cercle, α étant l'angle du rayon vecteur avec la verticale passant par ce centre, r la distance au centre d'un point quelconque situé sur ce rayon vecteur, entre le centre et la circonférence, R le rayon du cercle, on trouvera facilement, en partant de l'expression générale de la vitesse moyenne donnée au numéro 100,

$$U_1 = \frac{2\sqrt{2g}}{\pi R^2}\int_0^{\pi} d\alpha \int_0^{R} rdr\sqrt{H + r\cos\alpha}.$$

En développant le radical en série et effectuant les opérations que comportent les intégrations indiquées dans cette formule, elle se met sous la forme

$$U_1 = K_1 \sqrt{2gH},$$

en posant

$$K_1 = 1 - \frac{1}{32}\frac{R^2}{H^2} - \frac{5}{1024}\frac{R^4}{H^4} \cdots\cdots$$

On voit que, lorsque R est très petit par rapport à H_1, K_1 ne diffère pas sensiblement de l'unité, et que l'on peut écrire, comme pour le cas du rectangle,

$$U_1 = \sqrt{2gH};$$

le rapport $\frac{R}{H}$ est d'ailleurs le même que le rapport $\frac{h-h'}{2H}$, puique $h-h'$ est la hauteur de l'orifice, qui, pour le cercle, est égale à 2R.

Voici une table qui peut servir à déterminer K_1 lorsque la grandeur de la hauteur d'orifice, par rapport à la charge sur cet orifice, exige qu'on donne à ce coefficient une valeur autre que l'unité :

VALEUR de $\frac{h-h'}{2H}$ ou $\frac{R}{H}$.	VALEURS DE K_1 pour LE RECTANGLE.	VALEURS DE K_1 pour LE CERCLE.
0,00	1,00000	1,00000
0,10	0,99958	0,99968
0,20	0,99832	0,99842
0,30	0,99619	0,99715
0,40	0,99312	0,99498
0,50	0,98904	0,99189
0,60	0,98383	0,98816
0,70	0,97724	0,98400
0,80	0,96896	0,97799
0,90	0,95828	0,97437
1,00	0,94281	0,95385

On voit d'abord, par ce tableau, en comparant les deux dispositifs d'orifice, que, pour une même valeur de $\frac{h-h'}{2H}$, la valeur de K_1 est plus grande pour le cercle que pour le rectangle, de sorte que *la forme circulaire est celle qui, à surface égale, assurerait le débit le plus fort.*

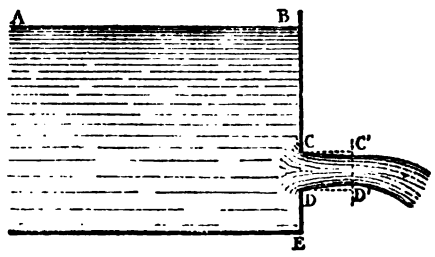
On voit aussi que les valeurs de K_1, tant pour le cercle que pour le rec-

tangle, diffèrent très peu de l'unité, tant que le rapport $\frac{h-h'}{2H}$ est plus petit que 0,50, c'est-à-dire que H est plus grand que $h-h'$, ce qui correspond au cas où la charge sur le centre est égale à la hauteur de l'orifice, ou bien la charge sur le sommet de l'orifice égale à la moitié de la hauteur de cet orifice.

On serait donc conduit à cette règle très simple que *la vitesse moyenne peut se calculer avec une exactitude suffisante, comme si elle était due à la charge sur le centre de l'orifice, tant que la charge sur son sommet est plus grande que la moitié de sa hauteur*, et ce n'est que lorsque cette charge devient moindre que cette limite qu'il devient nécessaire de multiplier la vitesse qui lui est due par le coefficient K_1 pour avoir la vitesse moyenne. Il résulte encore de ce qui vient d'être dit que, si l'on calcule toujours la vitesse moyenne comme si elle était due à la charge sur le centre, on prend une charge un peu trop forte, puisque K_1 devient alors plus petit que l'unité et puisque $\sqrt{H}$ doit, dans l'expression de U_1, être remplacé par $K\sqrt{H}$, et que la charge réelle devrait dès lors rester au-dessus du centre, d'autant plus que la charge sur le sommet de l'orifice deviendrait plus petite par rapport à sa hauteur.

Si l'orifice de sortie, au lieu de se raccorder par évasement avec la paroi du réservoir, comme l'indique la figure 27, était percé dans la paroi même, comme l'indique la figure 28, les filets seraient brusquement déviés à leur arrivée à cet orifice CD, et la veine fluide présenterait, à peu de distance en aval de l'orifice CD, une section C'D' plus petite que CD, qui s'appelle la *section contractée*, le phénomène qui produit cet effet portant le nom de *contraction de la veine fluide;* et le débit serait mesuré par l'aire de la section contractée multipliée par la vitesse moyenne dans cette section. Ce débit est plus petit que celui qu'on obtiendrait en multipliant l'aire de la section de l'orifice lui-même par la vitesse moyenne dans cette section; de sorte que, si m désigne un coefficient plus petit que l'unité, que l'on appelle *coefficient de réduction de la dépense* ou simplement *coefficient de débit*, la dépense réelle q d'un orifice dont la section serait Ω et la vitesse moyenne U aurait pour expression :

Fig. 28.



$$q = m\,\Omega\,U.$$

J'aurai occasion de parler en détail de ce coefficient dans la partie pratique

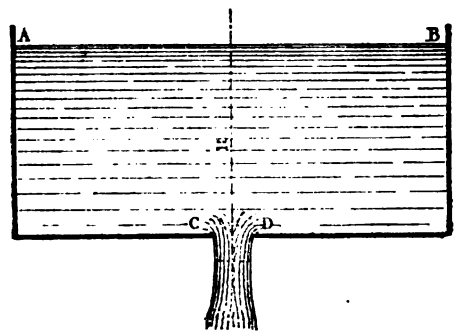
de mon travail, et il suffit de dire ici qu'il peut, suivant le dispositif adopté pour l'orifice, varier entre 0,50 et 1,00.

Faisons remarquer maintenant que, puisqu'il faut, en tout état de cause, multiplier les *débits théoriques* ΩU par un coefficient de réduction pour avoir le débit réel, il n'y a plus aucun intérêt à se servir d'une formule compliquée pour calculer la vitesse moyenne, et la plus simple sera la meilleure; aussi est-ce la formule

$$U = \sqrt{2gH},$$

indiquée par du Buat, qui reste la seule employée dans la pratique, quel que soit le rapport entre la hauteur de l'orifice et la charge sur son sommet. On détermine, en conséquence, les valeurs de m que l'expérience seule peut donner et qui ne sont autre chose que les rapports $\frac{q'}{q}$ entre les débits q' mesurés au moyen d'un réservoir de jauge et les débits calculés $q = \Omega\sqrt{2gH}$.

Fig. 29.



Examinons maintenant le cas où l'orifice CD, au lieu d'être vertical, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, serait horizontal, ainsi que l'indique la figure 29. Dans ce cas, la charge H sur tous les points de l'orifice reste constante, et si nous prenons pour plan des xy le plan de l'orifice, l'expression de la vitesse moyenne deviendra

$$U_1 = \frac{\int dx \int dy \sqrt{2gH}}{\int dx \int dy} = \sqrt{2gH},$$

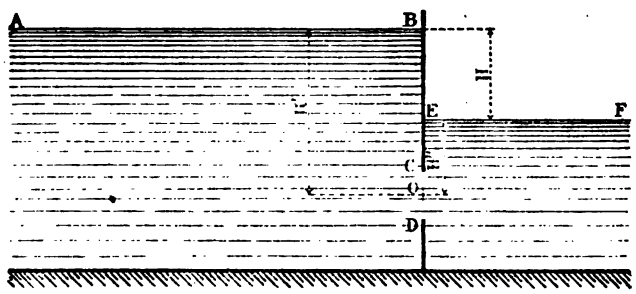
et ici cette valeur de la vitesse moyenne est rigoureusement exacte, quelle que soit la forme de l'orifice, puisqu'elle est la même pour tous les filets, en remarquant toutefois que, si l'orifice est ouvert brusquement dans la paroi même, il y a encore, comme tout à l'heure, contraction de la veine, et il faut, dès lors, toujours multiplier par un certain coefficient de réduction le débit obtenu en multipliant l'aire de l'orifice par la vitesse due à la charge.

Tout ce qui vient d'être dit suppose que la veine fluide jaillit à l'air libre, à sa sortie de l'orifice, mais la même formule pratique de la vitesse moyenne s'appliquerait aussi au cas où l'orifice serait noyé à l'aval, c'est-à-dire où la

veine jaillirait dans un second réservoir, dont le niveau serait inférieur à celui du premier.

Soient AB, EF (fig. 30) les niveaux d'amont et d'aval, H leur différence de niveau BE, H′ la hauteur du niveau d'amont au-dessus du milieu O de la hauteur de l'orifice, H″ la hauteur OE du niveau d'aval au-dessus de ce même point. La pression sur l'orifice est ici égale à la pression atmosphérique, augmentée de la colonne d'eau ayant H″ pour hauteur; il faudra dès lors, dans la formule (γ_{17}) du numéro 101, faire

Fig. 30.



$$p_1 - p_0 = \pi H'',$$
$$\zeta_1 = H',$$

et l'on en déduira

$$U_1 = \sqrt{2g(H' - H'')},$$

ou, si H désigne la différence de niveau H′ − H″ des deux retenues d'amont et d'aval,

$$(\lambda) \qquad U_1 = \sqrt{2gH}.$$

Nous retombons donc sur la formule de du Buat, avec cette seule différence qu'ici H est la différence de niveau des deux biefs.

Il suit de là que *la formule de du Buat convient à tous les cas, que l'orifice soit libre ou noyé, pourvu que, dans le premier cas,* H *désigne la charge hydrostatique sur le milieu de la hauteur de l'orifice, et, dans le second, la différence des charges dues aux vitesses d'amont et d'aval ou la différence de niveau des deux biefs.*

La contraction de la veine existe, d'ailleurs, toujours, que l'orifice débouche à l'air ou dans l'eau, c'est-à-dire qu'il soit libre ou noyé, de sorte que, si $\Omega_1 U_1$ est le débit que l'on calculerait en multipliant l'aire Ω_1 de la section de l'orifice par la vitesse moyenne U_1, le débit réel Q aurait pour valeur

$$(\mu) \qquad Q = m\,\Omega_1\,U_1,$$

m étant un coefficient à déterminer par l'expérience pour chaque dispositif d'orifice et qui est plus petit que l'unité.

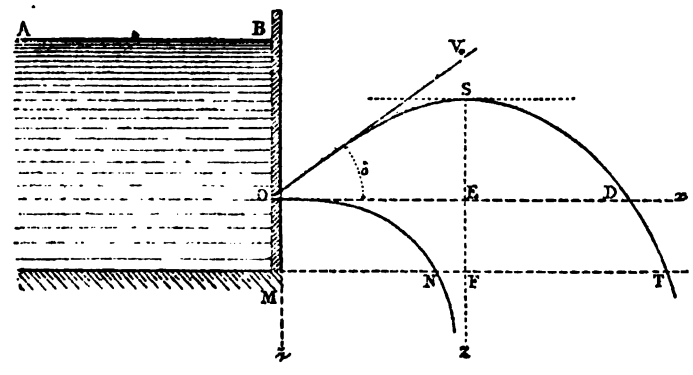
Les formules (λ) et (μ) permettront de calculer les débits de tous les orifices, quelle que soit leur forme, qu'ils soient libres ou noyés, à la condition de déterminer par l'expérience la valeur de m qui conviendra à chaque figure spéciale d'orifice. On voit, dès lors, que la théorie si abstraite du mouvement des fluides sans frottements conduit, moyennant l'introduction d'un coefficient de correction à déterminer par l'expérience, à des expressions très simples de la vitesse et du débit des orifices avec charge sur leur sommet, et qui sont, en même temps, tout à fait suffisantes pour la pratique. L'hydraulique abstraite n'eût-elle produit que ce seul résultat, qu'il faudrait encore lui en garder quelque reconnaissance; car ces formules sont certainement celles que l'on emploie le plus couramment dans toutes les opérations de jaugeage.

102 *bis*. *Forme de la veine après sa sortie d'un orifice avec charge sur le sommet.* — Je ne parlerai pas ici de la contraction, qui sera traitée en détail dans la partie pratique de mon ouvrage, et je n'entends indiquer, pour le moment, que les traits généraux de la forme de la veine auxquels peut conduire la théorie exposée dans ce qui précède.

Je n'entends pas ici par ces mots *forme de la veine* les formes plus ou moins bizarres que l'on parvient à donner à cette veine par des dispositifs spéciaux d'orifice, mais bien la forme normale qu'elle affecterait après sa sortie d'un orifice régulier, circulaire ou rectangulaire. Pour analyser cette forme, il faut commencer par s'occuper de celle que prendrait un filet élémentaire de la veine, et, pour cela, supposer d'abord l'orifice très petit, circulaire si l'on veut.

Considérons donc (fig. 31) un orifice très petit O, dont l'axe soit incliné d'un angle δ sur l'horizontale passant par le centre de cet orifice et située

Fig. 31.



dans le plan vertical perpendiculaire à celui de l'orifice passant par ce même point.

Si par l'orifice O sortait, dans la direction de son axe, une molécule liquide lancée avec une vitesse initiale V_0, elle décrirait, dans le plan vertical que je viens d'indiquer, une trajectoire qui a été déterminée au numéro 50, chapitre II de l'introduction; c'est une parabole, représentée sur la figure par la courbe OSD. Si l'on suppose maintenant que cette courbe devienne fixe, il est évident qu'elle sera suivie par toute molécule fluide s'échappant de l'orifice suivant la direction de son axe avec la vitesse initiale V_0, qu'avait tout à l'heure la molécule que nous avions considérée. Cette courbe est donc celle du filet s'échappant de notre très petit orifice avec la vitesse V_0, due ici à la charge OB sur cet orifice.

Reprenons maintenant l'équation de la courbe, qui est l'équation (31) du numéro 50,

$$(31) \qquad z = x \operatorname{tang} \delta - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \delta}.$$

Les z sont comptés de bas en haut à partir de point O et les x sur l'horizontale Ox. Pour approprier cette équation au cas qui nous occupe, il suffit d'y faire $V_0 = \sqrt{2gH}$, H étant la charge sur le centre de l'orifice, et l'on aura

$$(31') \qquad z = x \operatorname{tang} \delta - \frac{x^2}{4H \cos^2 \delta}.$$

Les valeurs de l'amplitude OD = A du jet et de sa montée SE = M seront données par les expressions (33) et (34) du numéro 50, qui deviennent ici, en y substituant pour V_0 sa valeur $\sqrt{2gH}$,

$$(33') \qquad x = \mathrm{OD} = \mathrm{A} = 2\mathrm{H} \sin 2\delta,$$

$$(34') \qquad z = \mathrm{SE} = \mathrm{M} = \mathrm{H} \sin^2 \delta.$$

Si l'on veut, d'ailleurs, rapporter la parabole à ses axes, en comptant maintenant les z de haut en bas, il suffit de déterminer le paramètre $2p$ dans l'équation

$$x^2 = 2pz,$$

qu'elle comporte pour ce cas, en faisant passer la courbe par le point D, dont les coordonnées, par rapport au sommet S pris pour origine, sont :

$$x = \frac{\mathrm{A}}{2} = \mathrm{H} \sin 2\delta,$$

$$z = \mathrm{M} = \mathrm{H} \sin^2 \delta,$$

d'où l'on déduit

$$2p = 4H\cos^2\delta,$$

et l'équation de notre parabole sera, dès lors,

$$(31'') \qquad x^2 = 4H\cos^2\delta . z.$$

Avec cette équation, rien n'est plus facile que de calculer l'amplitude qu'atteindrait le jet à une hauteur donnée au-dessous de l'orifice. Elle donnerait, en effet, le point S étant déterminé par la montée $SE = H\sin^2\delta$, l'ordonnée qui correspondrait à l'abscisse $SF = SE + EF$, EF étant la hauteur donnée au-dessous de l'orifice. L'ordonnée étant ainsi calculée, il suffirait de l'ajouter à la longueur constante $OE = \frac{A}{2} = H\sin 2\delta$ pour avoir l'amplitude cherchée.

Si l'on suppose maintenant que l'axe de l'orifice soit horizontal, la parobole ON qui correspond à ce cas a pour équation, puisque $\delta = 0$,

$$(31''') \qquad x^2 = 4Hz,$$

qui n'est autre chose que l'équation (35) du numéro 50, dans laquelle on aurait remplacé V_0 par sa valeur actuelle $\sqrt{2gH}$.

On déduit de ce rapprochement le théorème suivant, qui ne manque pas d'intérêt :

Un jet fluide sortant horizontalement d'un orifice tend, de même qu'un projectile lancé horizontalement, à tracer une parabole dont le paramètre est égal à quatre fois la hauteur due à la vitesse de sortie.

Ce théorème définit la forme que tend à prendre l'axe de toute veine fluide débouchant à l'air à sa sortie d'un orifice quelconque.

L'équation (31''') permet de calculer facilement l'amplitude MN du jet; elle donnerait, d'ailleurs,

$$H = \frac{x^2}{4z};$$

et, si l'on désigne par V la vitesse due à cette hauteur, on aurait

$$V = \sqrt{2gH} = \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{z}},$$

formule qui permet de déterminer la vitesse en un point quelconque de la courbe en mesurant ses coordonnées. C'est ainsi que Michelotti a déterminé les vitesses correspondant à des hauteurs variables z, en mesurant sur chaque trajet les valeurs de x qui correspondaient à des valeurs données de z.

Si l'axe de l'orifice était vertical, le filet fluide serait, suivant les cas, lancé de bas en haut à partir de l'orifice, ou bien de haut en bas. Dans l'un comme dans l'autre cas, il suivrait les lois de la chute des graves, que nous avons exposées au numéro 49, chapitre II, et serait soumis à l'équation

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z,$$

qui, en remplaçant ici $\frac{V_0^2}{2g}$ par sa valeur H, donnerait

$$V = \sqrt{2g(H+z)}.$$

Si l'orifice était disposé de manière à lancer le filet de bas en haut, ce qui est le cas des jets d'eau verticaux, z deviendrait négatif dans cette équation, et si l'on compte les z de bas en haut, elle s'écrirait ainsi qu'il suit :

$$V = \sqrt{2g(H-z)}.$$

La comparaison de ces deux formules montre que, dans le cas du mouvement de haut en bas, la vitesse va constamment en augmentant, tandis que, dans celui du mouvement de bas en haut, elle va en diminuant à mesure que le jet s'élève, c'est-à-dire que z augmente, et s'annule pour la valeur $z = H$, soit au moment où le jet atteint la hauteur due à la vitesse de sortie de l'orifice, hauteur qui est ici la différence de niveau entre le plan horizontal de l'orifice et celui de la retenue du réservoir duquel s'échappe le fluide.

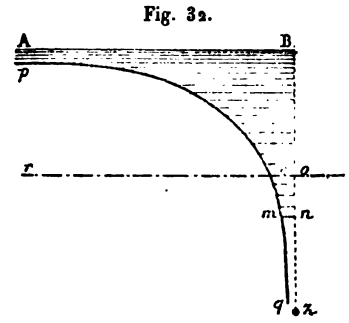
Les résultats auxquels nous venons d'arriver pour un filet fluide seraient encore vrais pour un faisceau de filets, c'est-à-dire pour un orifice qui ne serait plus très petit, à la condition que les filets restassent à très peu près parallèles, et l'on peut alors substituer à la vitesse V, dans la section très petite d'un filet, la vitesse moyenne U dans la section normale du faisceau de filets ou de la veine sortant de l'orifice.

Il nous reste, maintenant que nous connaissons la forme des courbes décrites par les veines après leur sortie des orifices avec charge sur leur sommet, à chercher la loi que tend à suivre la variation de leur section transversale, et, pour cela, nous commencerons par examiner le cas d'un jet lancé verticalement de haut en bas ou de bas en haut par un orifice dont le plan serait horizontal.

Supposons (fig. 32) que co représente le rayon r_1 de l'orifice de sortie dont l'axe Boz est vertical, et que mn représente le rayon r d'une section hori-

zontale de la veine faite à une distance $om = z$ au-dessous de l'orifice, et faisons une coupe verticale de la veine passant par son axe; nous compterons les z, sur cet axe, de haut en bas, le centre o de l'orifice étant pris pour origine et les r étant comptés sur l'horizontale ocr, intersection du plan horizontal de l'orifice avec le plan vertical de coupe.

Fig. 32.



Si l'on suppose que la permanence du mouvement continue à subsister au delà de l'orifice de sortie, et que nous désignions, d'ailleurs, par U_1 et U les vitesses moyennes dans la section de l'orifice et dans une section quelconque correspondant à l'ordonnée z, l'équation du mouvement sera, aux notations près, celle que nous avons déjà rencontrée si souvent :

$$\frac{U^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} = z,$$

et si H désigne la charge sur l'orifice qui donne $U_1 = \sqrt{2gH}$, cette équation deviendra

$$\frac{U^2}{2g} = H + z.$$

Mais, d'un autre côté, la permanence du mouvement entraîne, par l'équation de continuité, la condition

$$\pi r_1^2 U_1 = \pi r^2 U,$$

d'où

$$U = \frac{r_1^2 U_1}{r^2} = r_1^2 \frac{\sqrt{2gH}}{r^2},$$

et cette valeur de U, substituée dans l'équation précédente, conduira à la suivante :

$$r^4 = r_1^4 \cdot \frac{H}{H+z},$$

qui est l'équation d'une hyperbole du 4e degré en r. Elle montre tout de suite que, pour $z = 0$, on a $r = r_1$ et que r diminue à mesure que z augmente, pour devenir nul pour $z = \infty$; la courbe a donc l'axe vertical de l'orifice pour asymptote.

Si nous supposons maintenant que z devienne négatif, c'est-à-dire que l'orifice lance son jet de bas en haut, r, qui sera égal à r_1 pour $z = 0$, deviendra infini pour $z = -H$, c'est-à-dire lorsque la montée du jet d'eau deviendra

égale à la charge sur l'orifice, et la courbe aura, dès lors, pour seconde asymptote la trace AB du plan horizontal de la retenue sur le plan vertical des coordonnées. La figure générale de la coupe verticale de la veine est donc représentée par l'hyperbole *pcmq*, et la forme de cette veine est, dès lors, celle d'un hyperboloïde de révolution autour de l'axe vertical de l'orifice. Il suit de là que toute veine lancée de bas en haut va en s'épanouissant à mesure qu'on se rapproche de la hauteur de retenue au-dessus de l'orifice, et que toute veine lancée de haut en bas va en s'amincissant à mesure que l'on descend au-dessous de l'orifice. Si ces déductions théoriques ne se vérifient pas entièrement par l'expérience, c'est que la résistance de l'air et surtout les vibrations qui accompagnent tout écoulement fluide font que la masse de la veine tend à se diviser sous leur influence, et il se produit entre les éléments de cette masse une espèce de dissociation qui détruit la continuité dans le mouvement. Il n'en est pas moins vrai que, dans les limites au delà desquelles la continuité n'existant plus aucune théorie n'est plus possible, tout le monde peut constater l'amincissement et l'épanouissement progressif des veines verticales suivant qu'elles sont lancées de haut en bas ou de bas en haut, et l'on ne saurait dire, dès lors, que la théorie telle qu'elle vient d'être exposée soit en contradiction avec l'expérience.

Ajoutons maintenant que l'équation

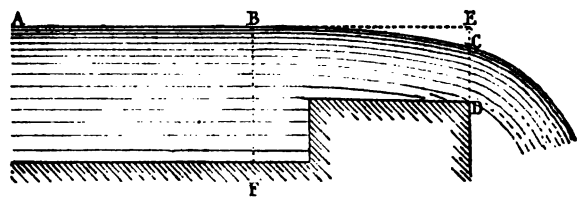
$$\frac{U^2}{2g} - \frac{U_0^2}{2g} = z,$$

de laquelle nous sommes partis pour l'analyse qui précède dans le cas d'un jet d'eau vertical est vraie, comme on l'a déjà vu plus d'une fois, quelle que soit la forme de la trajectoire ou de l'axe du filet, et elle s'appliquerait, dès lors, tout aussi bien à la parabole des jets d'eau inclinés. Pour toutes les valeurs de z qui seraient au-dessous de l'horizontale Ox (fig. 31), c'est-à-dire pour la partie OS de la courbe, le jet tendrait à s'épanouir à mesure qu'il monterait vers le point S, et à s'amoindrir dans la partie SD de la courbe à mesure qu'il s'éloignerait du même point dans sa descente. C'est ce qui explique l'extrême variété de formes à laquelle on peut arriver dans les gerbes d'eau en variant les inclinaisons des jets dont on les compose.

103. *Écoulement de l'eau par un déversoir.* — Lorsque l'écoulement se fait par un déversoir, le niveau supérieur AB (fig. 33) de la retenue s'infléchit, à partir d'un certain point B, pour prendre la courbure BC; il s'établit ainsi

à la surface de la nappe d'eau une chute EC, et la veine, après avoir franchi le sommet D du déversoir, tombe à l'air libre avec une forme parabolique analogue à celle qui a été indiquée au numéro précédent pour la veine qui jaillit d'un orifice avec charge sur son sommet.

Fig. 33.



Désignons par Ω_0 l'aire de la section transversale du réservoir au point B où la dénivellation commence, par Ω_1 l'aire de la section verticale suivant la crête du déversoir, par H la hauteur DE du point B au-dessus de cette crête, par h la chute EC, par U_0 et U_1 les vitesses moyennes dans les sections Ω_0 et Ω_1. En supposant que l'écoulement se fasse par filets indépendants et sensiblement parallèles à ABC, que la pression soit celle de l'atmosphère en tous les points de la section CD et que, de plus, cette section verticale CD puisse être censée normale aux filets, on arriverait, en appliquant à ces filets le principe des forces vives, comme nous l'avons fait pour l'écoulement par les orifices avec charge sur leur sommet, et en introduisant ensuite les vitesses moyennes, à l'équation

$$\frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_0^2}{2g} = h.$$

Si l'on suppose le mouvement permanent, l'équation de continuité donnera

$$\Omega_0 U_0 = \Omega_1 U_1,$$

et l'on déduira de ces deux équations

$$U_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}}},$$

et si Ω_1 est d'ailleurs très petit par rapport à Ω_0, ce qui arrive presque toujours en pratique, on aura

$$(\lambda_1) \qquad U_1 = \sqrt{2gh},$$

expression identique dans sa forme avec l'expression (λ), donnée au numéro 101 pour la vitesse à la sortie d'un orifice avec charge sur son sommet.

La première des équations écrites plus haut donnerait d'ailleurs aussi

$$(\lambda_2) \qquad U_1 = \sqrt{U_0^2 + 2gh},$$

et cette dernière montre que ce n'est qu'à la condition que U_0 soit nulle que l'expression (λ_1) peut être admise dans toute sa simplicité. Il faut donc, pour pouvoir employer cette expression, mesurer h en un point situé à une assez grande distance en amont du déversoir pour que l'eau y soit stagnante, et, s'il existait dans le réservoir un courant appréciable, c'est la formule (λ_2) qu'il faudrait employer au lieu de la formule (λ_1).

Si l'on désigne maintenant par l la largeur du déversoir mesurée sur sa crête, et par e l'épaisseur CD de la lame d'eau sur le déversoir, on aura

$$\Omega_1 = le = l(H - h),$$

et le débit par seconde $q_1 = \Omega_1 U_1$ aura pour expression :

$$(\mu_1) \qquad q_1 = l(H - h)\sqrt{2gh}.$$

Il existe certainement entre H et h une certaine loi qui les fait varier l'un en fonction de l'autre, mais cette loi est encore à trouver, et l'on n'y peut suppléer, quant à présent, que par des hypothèses. On peut la déterminer par cette condition que q_1 soit un maximum, ce qui donnerait

$$\frac{dq}{dh} = 0.$$

En différentiant l'équation (μ_1), on arrive à la relation

$$h = \frac{H}{3},$$

et en y substituant cette valeur de h, elle deviendrait

$$q_1 = 0{,}385\, lH\sqrt{2hH}.$$

Nous sommes donc conduit à représenter le débit q d'un déversoir par une expression de la forme

$$(\mu_2) \qquad q = m \,.\, lH\sqrt{2gH}$$

ou bien

$$(\mu_3) \qquad q = m\sqrt{2g} \,.\, lH^{\frac{3}{2}},$$

m étant un coefficient de réduction du débit analogue à celui que nous avons été obligé d'admettre pour la dépense des orifices avec charge sur le sommet, et dont la valeur devrait être déterminée par l'expérience pour chaque dispositif particulier de déversoir. La formule (μ_1) devrait, d'ailleurs, en tout état de cause, être affectée d'un coefficient analogue, et les formules (μ_2) et (μ_3) ont sur elle le grand avantage de ne plus contenir h, dont la valeur est très difficile à mesurer sur place, tandis que H, qui entre seule dans ces formules, s'obtient au moyen d'une opération des plus simples par la seule lecture d'une échelle placée en amont du déversoir.

104. *Efforts exercés sur les parois d'un vase par un fluide incompressible en mouvement.* — Supposons, pour fixer les idées, que le fluide se meuve dans un tuyau. Le fluide et la paroi forment un système que l'on peut regarder comme libre, à la seule condition de remplacer les obstacles fixes par des forces égales aux efforts supportés par ces obstacles et dirigés en sens contraire, de sorte que la question est ramenée à celle du mouvement du fluide sous l'action de ces forces et de la pesanteur.

Reportons-nous à la figure 23 du numéro 89 qui nous a déjà servi dans l'analyse du mouvement d'un fluide incompressible pesant et, conservant les notations établies à ce numéro, désignons, de plus, par F_x, F_y, F_z les résultantes partielles suivant les axes des x, y, z des forces égales et contraires aux efforts supportés par les parois.

V étant la vitesse dans une section quelconque RT (fig. 23) à l'époque t, les composantes de cette vitesse suivant les axes auront pour expressions :

$$V\frac{dx}{ds}, \quad V\frac{dy}{ds}, \quad V\frac{dz}{ds},$$

et les composantes de l'accélération vaudront

$$\frac{d}{dt}\left(V\frac{dx}{ds}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(V\frac{dy}{ds}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(V\frac{dz}{ds}\right),$$

$\frac{d}{dt}$ désignant ici des dérivées prises, non plus sur place, mais en suivant une même molécule pendant un instant dt.

La masse de la tranche ωds est $\rho\omega ds$, ρ désignant toujours le poids de l'unité de masse constant; et, puisque le fluide est incompressible par hypothèse, les composantes de l'accélération, multipliées par $\rho\omega ds$, donneront des

composantes égales et contraires à celles des inerties, et ces dernières ont, dès lors, pour expressions :

$$-\rho\int\omega ds\,\frac{d}{dt}\left(V\frac{dx}{ds}\right),\qquad -\rho\int\omega ds\,\frac{d}{dt}\left(V\frac{dy}{ds}\right),\qquad -\rho\int\omega ds\,\frac{d}{dt}\left(V\frac{dz}{ds}\right).$$

Les intégrales étant prises entre la section supérieure MN (fig. 23) de la colonne fluide et la section quelconque RT que nous considérons, il suffira, pour avoir les équations du mouvement, d'écrire les équations d'équilibre entre ces dernières composantes, prises en signe contraire, et celles de la force F et de la pesanteur. Les équations (A), données au numéro 12 (chap. I de l'introduction), deviennent ici :

$$F_x+\rho\int\omega ds\,\frac{d}{dt}\left(V\frac{dx}{ds}\right)=0,$$

$$F_y+\rho\int\omega ds\,\frac{d}{dt}\left(V\frac{dy}{ds}\right)=0,$$

$$F_z+\rho\int\omega ds\,\frac{d}{dt}\left(V\frac{dz}{ds}\right)-\rho g\int\omega ds=0.$$

On a d'abord, en effectuant les opérations et supposant les filets invariables de forme,

$$\frac{d}{dt}\left(V\frac{dx}{ds}\right)=\left(\frac{dV}{dt}+\frac{dV}{ds}\frac{ds}{dt}\right)\frac{dx}{ds}+V\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)\frac{ds}{dt},$$

et si nous désignons, comme au numéro 89, par ω' une section donnée et par V' la vitesse dans cette section, nous aurons, d'après l'équation de continuité,

$$\omega V=\omega' V',$$

d'où

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\omega'}{\omega}\frac{dV'}{dt}$$

et

$$\frac{dV}{ds}=\omega' V'\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

De ces relations et de celle qui a été écrite plus haut, en remplaçant, d'ailleurs, $\frac{ds}{dt}$ par V qui lui est égal, on déduit

$$\frac{d}{dt}\left(V\frac{dx}{ds}\right)=\frac{\omega'}{\omega}\frac{dV'}{dt}\frac{dx}{ds}+\omega'^2\frac{V'^2}{\omega}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\omega}\cdot\frac{dx}{ds}\right).$$

On trouverait des expressions analogues pour $\frac{d}{dt}\left(Y\frac{dy}{ds}\right)$ et $\frac{d}{dt}\left(Y\frac{dz}{ds}\right)$, et en les

substituant dans les trois équations de l'équilibre dynamique posées plus haut, celles-ci deviennent

$$F_x = -\rho\int\left[\omega'\frac{dV'}{dt}dx + \omega'^2V'^2 d\left(\frac{1}{\omega}\frac{dx}{ds}\right)\right],$$
$$F_y = -\rho\int\left[\omega'\frac{dV'}{dt}dy + \omega'^2V'^2 d\left(\frac{1}{\omega}\frac{dy}{ds}\right)\right],$$
$$F_z = -\rho\int\left[\omega'\frac{dV'}{dt}dz + \omega'^2V'^2 d\left(\frac{1}{\omega}\frac{dz}{ds}\right)\right] + \rho g\int\omega ds,$$

d'où l'on déduit, en effectuant l'intégration,

$$F_x = \text{const.} - \rho\omega'\frac{dV'}{dt}x - \rho\omega'^2V'^2\frac{1}{\omega}\frac{dx}{ds},$$
$$F_y = \text{const.} - \rho\omega'\frac{dV'}{dt}y - \rho\omega'^2V'^2\frac{1}{\omega}\frac{dy}{ds},$$
$$F_z = \text{const.} - \rho\omega'\frac{dV'}{dt}z - \rho\omega'^2V'^2\frac{1}{\omega}\frac{dz}{ds} + \rho g\int\omega ds.$$

Désignons maintenant par α_0, β_0, γ_0 et α_1, β_1, γ_1 les angles que fait l'axe du tuyau avec les axes des coordonnées x, y, z pour les sections extrêmes MN, PQ (fig. 23), qui correspondent aux valeurs s_0 et s_1 de s. On déterminera les constantes de manière que $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$ pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha_0$, $\frac{dy}{ds} = \cos\beta_0$, $\frac{dz}{ds} = \cos\gamma_0$, et il viendra

$$(\varpi)\quad \begin{cases} F_x = -\rho\omega'\frac{dV'}{dt}(x - x_0) - \rho\omega'^2V'^2\left(\frac{1}{\omega}\frac{dx}{ds} - \frac{\cos\alpha_0}{\omega_0}\right), \\ F_y = -\rho\omega'\frac{dV'}{dt}(y - y_0) - \rho\omega'^2V'^2\left(\frac{1}{\omega}\frac{dy}{ds} - \frac{\cos\beta_0}{\omega_0}\right), \\ F_z = -\rho\omega'\frac{dV'}{dt}(z - z_0) - \rho\omega'^2V'^2\left(\frac{1}{\omega}\frac{dz}{ds} - \frac{\cos\gamma_0}{\omega_0}\right) + \rho g\int_{s_0}^{s}\omega ds, \end{cases}$$

et, si l'on veut avoir les efforts relatifs à la colonne entière, il faut, dans ces expressions, faire $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos\beta_1$, $\frac{dz}{ds} = \cos\gamma_1$, $\omega = \omega_1$; elles deviennent, en désignant d'ailleurs par P le poids $\rho g\int_{s_0}^{s_1}\omega ds$ de la colonne,

$$(\varpi_1)\quad \begin{cases} F_x = -\rho\omega'\frac{dV'}{dt}(x_1 - x_0) - \rho\omega'^2V'^2\left(\frac{\cos\alpha_1}{\omega_1} - \frac{\cos\alpha_0}{\omega_0}\right), \\ F_y = -\rho\omega'\frac{dV'}{dt}(y_1 - y_0) - \rho\omega'^2V'^2\left(\frac{\cos\beta_1}{\omega_1} - \frac{\cos\beta_0}{\omega_0}\right), \\ F_z = -\rho\omega'\frac{dV'}{dt}(z_1 - z_0) - \rho\omega'^2V'^2\left(\frac{\cos\gamma_1}{\omega_1} - \frac{\cos\gamma_0}{\omega_0}\right) + P. \end{cases}$$

Ces formules montrent que, pour un même système de valeurs de ω' et V', les valeurs de F_x, F_y, F_z restent les mêmes entre les sections extrêmes de la colonne en mouvement, pourvu que les aires et les inclinaisons de ces sections ne changent pas; de sorte que *les efforts sont absolument indépendants de la figure du tuyau entre les deux sections extrêmes de la colonne.*

Il est essentiel de se rappeler que l'analyse qui vient d'être faite suppose toujours la section du tuyau assez petite pour que tous les filets traversant cette section y soient animés de la même vitesse; de sorte que les expressions (ϖ_1) ne s'appliqueraient rigoureusement qu'à un vase de section très petite, et pour les appliquer avec quelque exactitude à un vase de section quelconque, en y introduisant les vitesses moyennes, il faudrait que l'écoulement fût tel que l'on pût regarder les filets comme sensiblement parallèles.

Si le mouvement était permanent, il faudrait, dans les équations (ϖ_1), faire

$$\frac{dV'}{dt} = 0,$$

et, en y remplaçant d'ailleurs $\omega_1 V_1$ par q_1 exprimant le débit par seconde constant dans ce mouvement, elles deviendraient

$$(\varpi_2) \qquad \begin{cases} F_x = -\rho q_1^2 \left(\frac{\cos\alpha_1}{\omega_1} - \frac{\cos\alpha_0}{\omega_0}\right), \\ F_y = -\rho q_1^2 \left(\frac{\cos\beta_1}{\omega_1} - \frac{\cos\beta_0}{\omega_0}\right), \\ F_z = -\rho q_1^2 \left(\frac{\cos\gamma_1}{\omega_1} - \frac{\cos\gamma_0}{\omega_0}\right) + P, \end{cases}$$

expressions remarquables par leur simplicité et leur symétrie.

Si la section supérieure était horizontale et la section inférieure verticale, comme cela arrive le plus ordinairement et notamment pour un réservoir dans la paroi duquel est ouvert un orifice, les équations (ϖ_2), en y donnant à α_0, β_0, γ_0 et α_1, β_1, γ_1 les valeurs qui conviennent à ces deux cas, se réduiraient aux deux suivantes :

$$(\varpi_3) \qquad \begin{cases} F_y = -\frac{\rho q_1^2}{\omega_1}, \\ F_z = -\frac{\rho q_1^2}{\omega_0} + P. \end{cases}$$

La première de ces équations donnerait l'effort horizontal que produit la sortie du fluide par l'orifice, et si l'on y remplace q_1 par sa valeur $\omega_1 V_1$ et V_1 par sa

valeur $\sqrt{2g\zeta_1}$, ζ_1 étant la charge sur le centre de l'orifice, elle devient, en se rappelant que $\pi = \rho g$,

$$F_y = -\pi . 2\omega_1 \zeta_1.$$

Cette expression montre que *le vase tend à être repoussé en sens inverse de la vitesse de sortie par une force mesurée par le poids d'une colonne d'eau ayant pour base la section de l'orifice et pour hauteur le double de la charge.* Cette réaction horizontale, dont l'évaluation serait d'ailleurs tout autre si l'on tenait compte des frottements, des contractions de la veine, etc., explique diverses expériences de physique, et notamment celle de la roue à réaction. Elle explique tout aussi bien le recul du canon lorsqu'il lance un projectile d'une masse suffisante pour que la réaction horizontale puisse vaincre l'inertie de la pièce et de son affût, ou plutôt les frottements de ce dernier contre le sol.

Si les deux sections extrêmes étaient toutes deux horizontales, ce qui arriverait pour un réservoir vidant de fond, les équations (ϖ_2), en y introduisant les valeurs de α_0, β_0, γ_0 et α_1, β_1, γ_1, qui caractérisent ce cas, se réduiraient à une seule :

$$(\varpi_4) \qquad F_z = -\rho q_1^2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega}\right) + P.$$

La réaction horizontale disparaît dans ce cas, comme on devait s'y attendre, et l'effort vertical subsiste seul. On remarquera d'ailleurs que, si l'on avait $\omega_0 = \omega_1$, cette expression se réduirait au poids de la colonne d'eau.

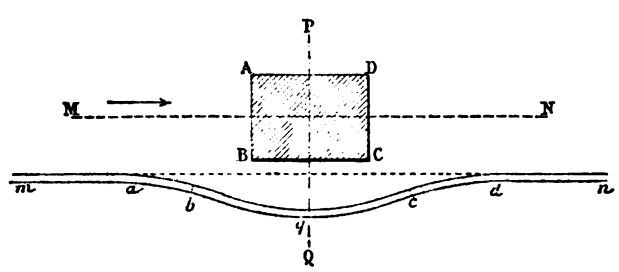
Il faut remarquer maintenant que le premier terme de l'expression (ϖ_4) de F_z ne reste négatif qu'à la condition que l'on ait $\omega_1 < \omega_0$. Or on a déjà vu au numéro 89 que cette condition était la condition nécessaire pour que le mouvement pût devenir permanent, et, dès lors, on peut déduire de la forme de l'équation (ϖ_4) que l'effort *qu'un vase à axe vertical reposant par sa base sur un appui exerce sur cet appui est moindre lorsque le fluide contenu dans le vase est en écoulement permanent par un orifice percé dans le fond que lorsqu'il est en équilibre ou en mouvement uniforme*, puisque pour $\omega_1 < \omega_0$ le terme entre parenthèses $\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_0}\right)$ reste toujours positif, et que, par conséquent, $F_z = P - \rho q_1^2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_0}\right)$ est plus petit que P.

105. *Mouvement d'un corps solide dans un fluide.* — La question du mouvement des solides dans un milieu fluide est une des plus difficiles à soumettre à l'analyse, à cause de l'ignorance profonde où l'on est encore des lois de la

résistance des milieux, comme je l'ai déjà fait remarquer au numéro 51. Aussi me bornerai-je aux indications les plus rudimentaires de la théorie à esquisser, sauf à affecter ses résultats de coefficients à déterminer par l'expérience dans chaque cas particulier, comme on a été conduit à le faire pour les coefficients de réduction de la dépense des orifices.

Considérons (fig. 34) un corps ABCD solide et fixe dans le courant d'un fluide incompressible pesant dont l'axe longitudinal soit la ligne MN, et supposons le mouvement du fluide uniforme, ce qui permet d'admettre qu'il ait lieu par filets rectilignes et parallèles à cet axe. Voyons donc ce qui se passera dans un filet *mn* qui resterait parallèle à MN, sans la présence du corps solide. Le filet sera dévié par cet obstacle, de la forme duquel dépendra le degré de courbure qu'il prendra. Cette courbure diminuera, d'ailleurs, à mesure que l'on s'éloignera du corps dans le sens transversal PQ, pour disparaître à une certaine distance du corps. Les courbes de déviation présenteront vers leur milieu leur concavité *abcd* à l'axe MN et auront nécessairement deux inflexions en *b* et *c* près des points *a* et *d*, où les filets abandonnent leur direction primitive parallèle à MN ou y reviennent. De plus, les sections des filets fluides seront moindres dans les parties recourbées que dans les parties droites, parce que dans le plan PQ leur somme est diminuée de la section entière du corps. Donc les vitesses seront notablement plus grandes sur les faces BC, AD du corps qu'à l'amont; d'où il suit que la pression à l'amont est, en compensation, notablement plus forte que sur les côtés. On peut considérer le filet *mabcdn* comme coulant dans un tuyau à enveloppe solide et déterminer, dans cette hypothèse, l'effort exercé sur la paroi du tuyau parallèlement à l'axe MN. On se servira, à cet effet, des formules données au numéro précédent. En admettant que les efforts ainsi calculés se transmettent d'un filet à l'autre, il en résultera que la face antérieure AB du corps solide fixe subira une pression égale à leur résultante, et qui sera évidemment plus grande que celle qu'il supporterait si ce fluide était stagnant. Je ferai d'ailleurs ici les observations suivantes. 1° Les filets ont leur section minima suivant PQ là où la somme de toutes leurs sections est diminuée de toute la section même AB

Fig. 34.



ou CD du corps; les vitesses vont en augmentant depuis a jusqu'à q et, par suite, les pressions diminuent de a en q, car on a ici le long d'un même filet $\frac{p}{\pi}+\frac{V^2}{2g}=$ const., sauf les petites dénivellations. 2° Si l'épanouissement (ou dilatation latérale des filets) très rapide de q en d n'entraînait pas une perte de charge sensible du genre de celles que l'on admet pour les frottements, la somme $\frac{p}{\pi}+\frac{V^2}{2g}$ se maintiendrait constante de q en d, et V y retrouvant les mêmes valeurs qu'à l'avant, c'est-à-dire de q en a, les excédents de pression produits à l'avant se reproduiraient à l'arrière et, par suite, le corps n'éprouverait en somme aucune poussée d'amont en aval ni d'aval en amont. Mais il y a des pertes de charge dues à l'épanouissement produit de q en d qui y réduisent la somme $\frac{p}{\pi}+\frac{V^2}{2g}$; en sorte que, lorsque la vitesse translatoire V redevient à l'arrière la même qu'à l'avant, la pression p y est notablement plus petite. Il y a donc trois choses ici : 1° à l'avant, augmentation de la pression par suite de la diminution de la vitesse et diminution de la force vive qui se transforme partiellement en pression; 2° sur les côtés, diminution de pression (non-pression ou succion) par suite de l'augmentation de $\frac{V^2}{2g}$, ce qui entraîne une diminution de $\frac{p}{\pi}$; 3° à l'aval, diminution de pression aussi, par suite des pertes de charge dues à l'épanouissement des filets, ou, ce qui revient au même, par suite de la partie notable de force vive que les frottements changent à l'arrière en force vive de tourbillonnements, puis en chaleur, et qui est perdue pour l'écoulement ultérieur.

Sans ces frottements, il n'y aurait pas de perte de charge à l'arrière, et les pressions y seraient aussi fortes qu'à l'avant, en sorte que le corps n'éprouverait aucune poussée générale de la part du fluide. Il importe de remarquer, d'ailleurs, que le fluide extérieur à bc ne peut pas supporter les pressions dues aux forces centrifuges de ce filet, ou du moins ne peut pas les supporter en vertu d'un excès de pression qu'acquerrait ce fluide extérieur à bc; car sur PQ et un peu loin du corps, les pressions restent les mêmes qu'avant et ne peuvent pas devenir plus grandes. Ces forces centrifuges déterminent donc simplement une succion ou diminution de pression sur le flanc BC, et elles sont alors équilibrées par l'excédent de la pression primitive, qui s'exerce un peu loin du corps, sur la pression en BC.

L'expression des efforts que nous avons à considérer ici serait donnée, si les frottements, à l'aval du corps surtout, étaient négligeables, par les valeurs de F_y données au numéro précédent, l'axe MN du parallélisme primitif des filets étant pris pour axe des y.

Prenons la plus générale de ces expressions, celle qui fait partie du système ϖ_2 du numéro 104,

$$F_y = -\rho q_2 \left(\frac{\cos\beta_1}{\omega_1} - \frac{\cos\beta_0}{\omega_0}\right),$$

qui peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$F_y = -\frac{\rho q^2}{\omega_1}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_0 \frac{\omega_1}{\omega_0}\right),$$

ou, si l'on se rappelle que π ou le poids de l'unité de volume a pour valeur ρg et que $q = \omega_1 V_1$,

$$F_y = +\pi\omega_1 \frac{V_1^2}{g}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_0 \frac{\omega_1}{\omega_0}\right).$$

Cette valeur, pour une valeur donnée de ω_1 et de V_1, ne variera qu'avec la quantité $\cos\beta_1 - \cos\beta_0 \frac{\omega_1}{\omega_0}$, c'est-à-dire avec l'inclinaison et le rapport des surfaces des sections extrêmes ω_0 et ω_1. On est conduit, dès lors, à admettre que, pour des figures semblables du corps, les courbes des filets déviés doivent aussi rester des courbes semblables sur lesquelles les vitesses des molécules conserveraient les mêmes rapports. D'où suivrait que, dans l'expression de l'effort correspondant à chaque filet, rien ne serait changé, si ce n'est le facteur ω_1, qui varierait, lui, comme les carrés des côtés homologues des figures semblables qu'affecterait le corps solide, conservant toujours sa même densité constante sous ces différentes formes. On doit admettre encore, d'après ces considérations, que, le corps conservant la même figure, les rapports des vitesses des molécules fluides ne varieraient pas avec la vitesse du courant; d'où résulterait, d'après la formule précédente, que les efforts resteraient toujours proportionnels au carré de cette vitesse.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que l'effort F exercé sur un corps solide fixe par un courant fluide peut être représenté par une expression de la forme

$$F = K_1 . \rho \Omega U^2$$

ou

$$F = K_1 \pi \Omega . \frac{U^2}{g},$$

Ω étant l'aire de la plus grande section transversale du corps (le maître couple dans un bateau), U la vitesse moyenne du courant et K_1 un coefficient, à déterminer par l'expérience, qui resterait constant pour tous les corps de

figures semblables, mais qui changerait avec le type de figure. Si l'on désigne, d'ailleurs, par H la hauteur due à la vitesse U, la formule précédente peut encore s'écrire ainsi qu'il suit :

$$F = \pi \Omega . 2K_1 . H.$$

D'où résulte que *l'effort exercé contre le corps peut être assimilé à celui d'une colonne de fluide dont la base serait la plus grande section transversale de ce corps et dont la hauteur serait le multiple de la hauteur due à la vitesse du courant indiqué par la valeur* $2K_1$ *qui conviendrait au type de la figure du corps.*

Je ferai remarquer maintenant que ce qui vient d'être dit pour un corps immobile dans un fluide en mouvement s'appliquerait tout aussi bien à un corps en mouvement dans un fluide stagnant ou dans un fluide en mouvement lui-même, mais dont la vitesse serait différente de celle du corps. Il suffirait, en effet, dans ce dernier cas, de prendre pour valeur de U la vitesse relative du corps et du fluide.

La formule que nous venons d'écrire n'est, en définitive, qu'une formule empirique, dont la forme seule est indiquée par la théorie, mais dont le coefficient appartient tout entier à des expérimentations pratiques.

Art. 2. — Mouvement de l'eau en tenant compte des frottements.

§ 1er. — Analyse générale.

106. *Premières indications.* — Dans l'article précédent (nos 83 à 105), nous avons fait absolument abstraction des frottements. Nous avons supposé, en effet, le fluide d'une mobilité absolue, ce qui exclut l'idée des frottements intérieurs, et, quant aux frottements extérieurs, c'est-à-dire sur les parois, nous les avons négligés, en supposant ces parois parfaitement polies.

Si cette abstraction peut, dans certains cas, conduire à des formules suffisantes, comme cela arrive, par exemple, pour les dépenses des orifices avec charge sur le sommet, il n'en est plus de même des courants d'eau se mouvant soit dans des tuyaux, soit dans des canaux découverts, dont les parois, plus ou moins rugueuses, sont l'origine de frottements qui influent de proche en proche et finissent par faire sentir leur effet dans toute la masse pour en retarder le mouvement. Tant que l'aire de la section transversale du courant ne varie que d'une manière insensible d'une section à l'autre, soit en plus soit en moins, et que l'axe du mouvement se compose lui-même de courbes continues et se raccordant graduellement les unes avec les autres, on peut, tout

en faisant entrer en compte le frottement sur les parois, admettre encore un quasi-parallélisme des filets et appliquer alors, à de très légères modifications près, les principes de l'article 1er; mais il n'en est plus de même lorsque, par suite de la disposition du courant, celui-ci présente des rétrécissements ou des élargissements notables d'une section à l'autre. Il devient alors impossible de considérer les filets comme parallèles et absolument nécessaire de tenir compte de leur courbure.

Pour analyser cette difficile question du mouvement de l'eau en tenant compte des frottements, au moins dans ses points principaux, je ne saurais mieux faire que d'emprunter mes déductions à l'excellente étude sur les eaux courantes de M. Boussinesq, qui a été insérée aux tomes XXIII et XXIV du recueil des Savants étrangers, et publiée ensuite en un volume intitulé : *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Mais avant de passer à la question générale, telle que cet habile géomètre l'a traitée, je dois indiquer la solution approximative que peut donner la théorie exposée à l'article précédent, dans les cas où la nature du courant permet de regarder, sans trop grande erreur, les filets comme à peu près parallèles.

107. *Solution approximative que l'on peut tirer de la théorie exposée à l'article 1er.* — En maintenant l'hypothèse de la mobilité absolue, qui est la base de la théorie exposée à l'article 1er, et en admettant de plus le *quasi-parallélisme* des filets, il ne resterait plus qu'à tenir compte du frottement sur les parois, et il suffira pour cela d'introduire dans les équations du mouvement l'expression de la résistance qu'il fait naître.

Reprenons ici l'équation (α) du numéro 88, qui est la plus générale,

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{g}\left(\frac{dV}{dt}+\frac{VdV}{ds}\right)=\frac{dz}{ds}-\frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds},$$

et qui ne s'applique rigoureusement qu'à un faisceau de filets dont la section normale à l'axe de ce faisceau serait très petite.

Cette équation, qui a été déduite des équations indéfinies de l'hydrodynamique, peut aussi être établie, comme je l'ai montré au numéro 88, en partant du principe des quantités de mouvement, et il suffit, pour l'étendre au cas qui nous occupe maintenant, d'introduire dans l'équation de ce principe indiquée au numéro 88 le terme qui proviendrait de l'impulsion de la force représentant la résistance due au frottement. La force qui représente cette résistance est ce que nous avons appelé une force répartie, et il faut dès

lors la définir, comme on l'a fait pour la pression. L'intensité de la résistance due au frottement sera donc la résistance qu'il produit sur l'unité de surface. Désignons, d'ailleurs, par χ le périmètre mouillé de la section normale ω du courant; $\chi\, ds$ sera la surface de contact contre la paroi de la tranche dont ds est l'épaisseur dans le sens de l'axe, et, si F est l'intensité du frottement définie comme il vient d'être dit, $F\chi\, ds$ sera la résistance du frottement sur cette surface de contact $\chi\, ds$. Cette force est, d'ailleurs, de direction parallèle à l'axe, de sorte que la projection sur cet axe de son impulsion pendant le temps Δt vaudra $F\chi\, ds\, \Delta t$. Si l'on introduit cette impulsion dans l'équation résultant du principe des quantités de mouvement avec le signe qu'elle comporte, il est facile de voir que celle-ci deviendra

$$(\alpha_1) \qquad \frac{1}{g}\left(\frac{dV}{dt}+\frac{V\,dV}{ds}\right)=\frac{dz}{ds}-\frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds}-\frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi}.$$

Si le mouvement était permanent, on aurait

$$\frac{dV}{dt}=0,$$

et cette équation deviendrait

$$(\alpha_2) \qquad \frac{1}{g}\frac{V\,dV}{ds}=\frac{dz}{ds}-\frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds}-\frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi}.$$

Enfin, si le mouvement était uniforme, on aurait à la fois

$$\frac{dV}{dt}=0, \qquad \frac{dV}{ds}=0,$$

et l'équation précédente deviendrait

$$(\alpha_3) \qquad \frac{dz}{ds}-\frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds}-\frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi}=0.$$

Si le courant formé par le faisceau de filets que nous considérons était dans un canal découvert et que, par conséquent, z fût la coordonnée verticale du profil en long de la surface libre, celle-ci donnerait la condition

$$dp=0,$$

et les équations précédentes deviendraient : pour le cas général,

$$(\alpha'_1) \qquad \frac{1}{g}\left(\frac{dV}{dt}+\frac{V\,dV}{ds}\right)=\frac{dz}{ds}-\frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi},$$

pour le mouvement permanent,

$$(\alpha'_2) \qquad \frac{1}{g}\frac{VdV}{ds} = \frac{dz}{ds} - \frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi},$$

et pour le mouvement uniforme,

$$(\alpha'_3) \qquad \frac{dz}{ds} - \frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi} = 0.$$

Telles sont les équations différentielles du mouvement dont on pourra se servir dans la pratique chaque fois que les filets pourront être regardés comme sensiblement parallèles d'une section à l'autre.

Les équations (α_2), (α'_2), multipliées par ds, peuvent s'intégrer immédiatement, sauf à ne faire qu'indiquer l'intégration pour le terme $\frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi}ds$, et il vient, si s_0, v_0, p_0 sont les valeurs de s, v et p qui correspondent à une valeur donnée z_0 de z,

$$(d_2) \qquad \frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z - z_0 - \left(\frac{p-p_0}{\pi}\right) - \int_{s_0}^{s}\frac{\chi}{\omega}F\,ds$$

pour le cas d'un tuyau, et

$$(d'_2) \qquad \frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z - z_0 - \int_{s_0}^{s}\frac{\chi}{\omega}F\,ds$$

pour le cas d'un canal découvert.

Remarquons, maintenant, que l'équation de continuité donnerait

$$V = \frac{V_0\,\omega_0}{\omega},$$

et, dès lors, on tire de l'équation (d_2) la valeur de la pression :

$$p = p_0 + \pi\left(z - z_0\right) - \frac{\pi}{2g}V_0^2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) - \int_{s_0}^{s}\pi\frac{\chi}{\omega}F\,ds,$$

équation qui ne diffère que par le terme $-\int_{s_0}^{s}\pi\frac{\chi}{\omega}F\,ds$ de l'équation analogue trouvée au numéro 95.

On arriverait, d'ailleurs, aussi à ces équations, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer au numéro 95, au moyen du principe des forces vives combiné avec l'hypothèse du parallélisme des tranches.

Il faut se rappeler que les équations qui viennent d'être écrites ne s'appliqueraient réellement que dans le cas où la section normale ω serait très

petite, mais elles s'appliqueraient encore avec une certaine approximation, le plus souvent suffisante dans les principaux cas de la pratique, en y introduisant les vitesses moyennes, et en prenant, sur le point où chaque section est coupée par l'axe, la différence de niveau $z - z_0$ et la différence des hauteurs représentatives des pressions $\frac{p-p_0}{\pi}$. Les équations (α_2) et (α'_2) s'appliqueront, d'ailleurs, d'autant plus exactement que l'écoulement s'approchera davantage du type du parallélisme des filets.

Pour tenir compte des inégalités de vitesse que les frottements introduisent entre les divers filets, soit lorsque la section varie, soit même lorsqu'elle est constante, on a cherché à introduire un coefficient de correction de l'expression de la force vive établie au moyen de la *vitesse moyenne*.

Afin de conserver à l'équation du mouvement permanent la forme qui lui a été donnée dans la plupart des traités d'hydraulique publiés jusqu'ici, j'ai désigné par ω non plus, comme précédemment, la section d'un filet ou d'un faisceau très petit de filets parallèles, mais la section totale du courant, de sorte que $d\omega$ serait maintenant la section élémentaire. Si V désigne la vitesse dans cette section élémentaire $d\omega$, et U la vitesse moyenne dans la section ω, on aura, d'après la définition donnée de la vitesse moyenne au numéro 100,

$$\omega U = \int V d\omega,$$

le signe $\int$ s'appliquant à toute la section ω. La force vive, correspondant à la vitesse V et à la section $d\omega$ pour un temps très petit Δt, vaudrait $\Delta t \cdot \rho \int V^3 d\omega$, la masse écoulée pendant ce temps ayant pour expression $\rho V d\omega . \Delta t$. Si l'on estimait cette force vive au moyen de la vitesse moyenne, son expression serait $\Delta t . \rho\omega U^3$. Or il est facile de voir que l'on a

$$\int V^3 d\omega > U^3 \omega.$$

Il suffit, pour cela, de poser, comme l'a fait M. Résal (page 312 du tome II de son traité de mécanique),

$$V = U + \varepsilon,$$

ce qui, eu égard à la relation

$$\omega U = \int V d\omega,$$

entraîne à la suivante :

$$\int \varepsilon d\omega = 0;$$

mais, en vertu de ces deux dernières relations, l'intégrale $\int V^3 d\omega$ devient

$$\int V^3 d\omega = U^3 \omega + \int \varepsilon^2 (2U + V) d\omega \cdot$$

Or l'intégrale $\int \varepsilon^2 (2U + V) d\omega$ est toujours un nombre positif, lors même que ε serait négatif, d'où résulte que l'on a toujours

$$\int V^3 d\omega > U^3 \omega;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il suit de là que, si l'on veut appliquer les équations (d_2), (d'_2) à un courant de section quelconque, il faut les écrire ainsi qu'il suit :

$$(\varepsilon'') \qquad \alpha\left(\frac{U^2 - U_0^2}{2g}\right) = z - z_0 - \left(\frac{p - p_0}{\pi}\right) - \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{s} \frac{\chi}{\omega} F\, ds$$

pour un tuyau, et

$$(\varepsilon''') \qquad \alpha\left(\frac{U^2 - U_0^2}{2g}\right) = z - z_0 - \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{s} \frac{\chi}{\omega} F\, ds$$

pour un canal découvert, α étant un coefficient plus grand que l'unité, qui a pour valeur

$$\alpha = \int \frac{V^3 d\omega}{U^3 \omega} \cdot$$

C'est sous la forme qui vient d'être indiquée par les expressions (ε''), (ε''') que l'on trouve écrite l'équation du mouvement permanent dans les traités d'hydraulique et d'après les travaux de Poncelet, Belanger, Coriolis et Vauthier, qui se sont servis du principe des forces vives pour arriver à cette équation.

On a beaucoup discuté sur le coefficient α, dont la valeur peut varier entre 1,10 et 1,40, suivant les dispositions locales du courant; mais je ne m'arrêterai pas ici plus qu'il ne faut sur ce point, me contentant d'indiquer ces limites, sauf à aborder plus loin la question d'une manière plus exacte.

108. *Valeur à attribuer à F.* — Il me reste maintenant à déterminer la valeur de F qu'il faut mettre dans les équations du numéro 107. Des expériences de du Buat et de Girard ont conduit à admettre que la résistance au mouvement d'un fluide glissant sur une surface solide était proportionnelle à la surface de contact, à la densité du fluide, au carré de la vitesse, et indépendante de la pression, ce qui revient à admettre que *cette résistance est repré-*

sentée par une colonne de fluide ayant pour base la surface de contact et pour hauteur la hauteur due à la vitesse du courant.

La surface de contact d'une tranche élémentaire ωds du courant sera exprimée par $\chi\, ds$, et l'expression de la résistance du frottement de cette tranche élémentaire serait, d'après ce qui vient d'être indiqué,

$$f \cdot \pi \chi\, ds \frac{U^2}{2g},$$

f étant un coefficient qui varierait avec la nature plus ou moins rugueuse de la paroi, mais resterait constant pour une même nature de paroi. On pourra donc, puisque $F \chi\, ds$ représente aussi, comme on l'a vu plus haut, cette résistance due au frottement de la tranche ωds sur la paroi, écrire

$$F \chi \cdot ds = f \pi \chi\, ds \cdot \frac{U^2}{2g};$$

d'où l'on tire

$$F = \pi f \cdot \frac{U^2}{2g},$$

et si l'on pose

$$\frac{f}{2g} = B_1,$$

on aura

$$(n) \qquad F = \pi B_1 U^2 = \rho g \cdot B_1 U^2.$$

109. *Équation du mouvement uniforme; détermination de F.* — Considérons maintenant l'équation (α'_3) qui convient au mouvement uniforme dans les canaux découverts, la plus simple de toutes,

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\chi}{\omega} \frac{F}{\pi}.$$

Dans le mouvement uniforme, tous les filets sont rectilignes et parallèles, de sorte que l'intersection de la surface libre du courant et de toute nappe parallèle à cette surface par un plan vertical passant par l'axe du courant est une ligne droite faisant avec l'horizontale un angle dont le sinus est $\frac{dz}{ds}$ ou ayant sensiblement une pente $\frac{dz}{ds}$ par mètre [1]. Si l'on désigne cette pente, constante dans le mouvement uniforme, par i, et par R_m le rapport $\frac{\omega}{\chi}$ de l'aire de la sec-

[1] On sait que la vraie pente par mètre que l'on considère en pratique n'est pas le sinus $\frac{dz}{ds}$ de l'angle, mais bien sa tangente $\frac{dz}{\sqrt{ds^2 - dz^2}}$; ces deux expressions diffèrent très peu lorsque l'angle est très petit, ce qui arrive toujours ici.

tion à son périmètre mouillé, rapport que l'on appelle *rayon moyen*, l'équation du mouvement uniforme deviendra, en ayant égard à la relation $F = \pi B_1 U^2$,

$$(\alpha'_4) \qquad R_m i = B_1 U^2.$$

Cette équation donne un moyen pratique très simple de déterminer expérimentalement les valeurs de B_1 et, par conséquent, de f et de F pour diverses natures de parois. Il suffit de faire couler dans des canaux rectilignes de section uniforme, mais ayant des parois de rugosité différente, un courant d'eau dont le débit constant serait connu d'avance. Si q est ce débit, on aurait

$$U = \frac{q}{\omega}.$$

ω, R_m et i se déterminent, d'ailleurs, par des opérations de mesurage et de nivellement très simples, et q est donné. On pourra, dès lors, tirer de l'équation (α'_4) la valeur de B_1, qui est

$$B_1 = \frac{R i}{U^2} = \frac{R_m i \omega^2}{q^2}.$$

Supposons qu'un premier canal ayant la pente i (dans le mouvement uniforme la pente de superficie est la même que la pente de fond) ait un débit q, et que la section mouillée qui s'établira dans le canal pour ce débit soit ω', on aura

$$B_1 = \frac{R'_m i \omega'^2}{q^2} = B'_1,$$

B'_1 étant la valeur numérique de B_1 pour ce canal.

On prendra ensuite un second canal ayant toujours la pente i, mais avec des parois plus rugueuses que celles du premier : pour débiter le même débit q, il s'y établira une section mouillée ω'', et l'on aura

$$B_1 = \frac{R''_m i \omega''^2}{q^2} = B''_1$$

et ainsi de suite, de sorte qu'on pourra faire une table des valeurs de B_1 qui correspondent aux diverses natures de parois et en déduire chaque fois les valeurs de $F = \pi B_1 U^2$, puisque, dans chaque expérience, on aura la valeur de $U^2 = \frac{q^2}{\omega^2}$.

En réalité, le coefficient B_1 n'est pas un nombre constant pour une paroi

donnée, et il varie un peu avec le rayon moyen, mais certainement fort peu ou très lentement lorsque le rayon moyen dépasse l'unité. L'expression

$$F = \pi B_1 U^2$$

elle-même ne serait, d'ailleurs, d'après les expériences de Girard, rigoureusement vraie que pour la vitesse à la paroi et non pour la vitesse moyenne, car il est absolument évident que l'influence du frottement à la paroi va en diminuant à mesure que les filets s'en éloignent davantage; de sorte que l'équation précédente reposerait en définitive sur une assimilation du mouvement d'un fluide contre une paroi solide avec celui d'un corps solide sur un plan incliné. On regarde le fluide comme se mouvant tout d'une pièce ou par tranches parallèles normales à l'axe du courant, avec une vitesse moyenne invariable, et l'on ne tient compte du frottement que comme force retardatrice constante par rapport à ce mouvement d'ensemble, tandis qu'elle varie en réalité avec la position de chaque filet dans la section transversale, et il en résulte nécessairement des frottements intérieurs que l'on suppose, pour ainsi dire, infinis, en les jugeant capables d'égaliser ainsi toutes les vitesses.

Il n'est pas sans intérêt de mettre en évidence cette assimilation entre le mouvement uniforme d'un fluide incompressible pesant, basé sur les approximations précédentes, qui font complètement abstraction du mode réel d'action des frottements intérieurs, et le mouvement uniforme d'un corps solide sur un plan incliné qui a été traité au numéro 56 (chapitre II de l'introduction). On avait trouvé que, P représentant le poids du corps, K le nombre par lequel il faut multiplier la pression normale au plan pour avoir la force retardatrice due au frottement du corps sur le plan, l'équation d'équilibre, qui est aussi la condition pour que le mouvement soit uniforme, était, α désignant l'angle que fait avec l'horizon le plan sur lequel glisse le corps solide,

$$P \sin \alpha = K . P \cos \alpha.$$

$P \sin \alpha$ est la composante du poids du corps suivant le plan, $P \cos \alpha$ sa composante normale au plan ou la pression, et $K . P \cos \alpha$ la résistance due au frottement le long du plan.

Si nous revenons maintenant au mouvement uniforme du fluide, l'équation de ce mouvement, en remarquant que $i = \sin \alpha$, peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\pi \omega . \sin \alpha = \chi F.$$

Dans cette équation, $\pi\omega$ représente le poids d'un volume de fluide ayant une section transversale ω sur une longueur égale à l'unité. $\pi\omega\sin\alpha$ est la composante de ce poids suivant le plan incliné qui compose le fond du canal. χF représente, d'ailleurs, le frottement sur l'unité de longueur suivant ce même plan et sur tout le périmètre mouillé de la section, force dirigée en sens contraire de la précédente. On voit qu'il y a identité complète entre les deux formules qui précèdent, au mode d'estimation du frottement près, et la formule (α'_4) s'applique, dès lors, aussi bien à l'hypothèse du mouvement par tranches normales à l'axe qu'à celle du mouvement par filets indépendants parallèles à cet axe.

110. *Observations sur les lois du frottement.* — Je dois ajouter quelques mots sur le mode d'estimation du frottement dans les solides et les fluides et rappeler d'abord en quoi consistent les différences. Nous avons vu au numéro 56 que, pour le frottement d'un corps solide contre une surface également solide, l'expérience avait paru établir que la résistance due au frottement était proportionnelle à la pression exercée sur la surface, mais indépendante de l'étendue de la surface et de la vitesse du corps. Pour le frottement d'un fluide incompressible sur une surface solide, cette résistance serait, au contraire, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, indépendante de la pression, proportionnelle à l'étendue de la surface de contact, et varierait avec la vitesse. Ces deux lois sont, dès lors, absolument aux antipodes l'une de l'autre. J'ai peine à croire, je l'avoue, qu'il puisse en être ainsi, et il y a probablement des éléments d'appréciation qui ont échappé aux expériences sur lesquelles on les a basées. J'ai déjà, au numéro 56, émis des doutes sur ce fait que le frottement des solides fût absolument indépendant de la vitesse, et je ne crois pas davantage que, dans le frottement d'un fluide incompressible contre un solide, la pression puisse rester absolument étrangère à la résistance. Ce n'est, dès lors, que sous bénéfice d'inventaire, et en faisant toutes réserves sur les résultats des expériences faites jusqu'ici, que l'on doit, à mon humble avis, admettre les lois des frottements adoptées dans tous les traités de mécanique appliquée.

111. *Solution générale du mouvement d'un courant fluide, en tenant compte des frottements tant extérieurs qu'intérieurs.* — Afin de faciliter à mes lecteurs la vérification qu'ils voudraient faire des déductions que j'indiquerai, en remontant à leur source, c'est-à-dire au livre écrit sur les eaux courantes par

M. Boussinesq, auquel je les emprunterai pour la plupart, je conserverai à celles de ses équations dont j'aurai à me servir les numéros qu'elles portent dans son livre, en les affectant simplement d'un accent. Ainsi le numéro 1 des équations de M. Boussinesq portera ici le numéro 1'. Ce géomètre a, d'ailleurs, désigné par σ la section transversale que j'ai désignée par ω, suivant ainsi la notation adoptée par la plupart des auteurs d'hydraulique et que je conserverai ici, comme je l'ai fait dans ce qui précède.

Cela posé, si l'on observe avec attention le mouvement d'un courant d'eau, on ne tarde pas à se convaincre qu'il n'est pas continu, dans l'acception mathématique du mot; il présente, au contraire, des changements rapides et dont une espèce de périodicité irrégulière est le caractère dominant; de sorte que, si l'on considère la moyenne des valeurs que prend, durant un court intervalle de temps τ, la composante de la vitesse suivant une direction donnée et en un point donné, cette composante locale n'en restera pas mois une fonction continue des coordonnées du point, et si l'on désigne par u, v, w les valeurs moyennes des composantes suivant les trois axes rectangulaires des coordonnées de la vitesse en un point (x, y, z), *la vitesse moyenne locale* sera la résultante de ces trois composantes, représentée (n° 30), comme on le sait, par la diagonale du parallélipipède construit à partir du point (x, y, z) sur trois lignes parallèles aux axes et dont les longueurs seraient proportionnelles à u, v, w.

M. Boussinesq a démontré que les propositions fondamentales établies pour les vitesses et les accélérations s'appliquaient aussi aux vitesses et aux accélérations moyennes locales. Ainsi l'équation (s) de continuité ou de la conservation des volumes donnée au numéro 83, et dans laquelle u, v, w sont les composantes de la vitesse d'une molécule, s'applique aussi à la vitesse moyenne locale, et si u, v, w représentent maintenant les composantes, non plus de la vitesse d'une molécule, mais de sa vitesse moyenne locale, on a entre ces composantes la relation

$$(1') \qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

L'accélération moyenne locale aura aussi des expressions analogues à celles qui ont été données au numéro 84. Les équations indéfinies de l'hydrodynamique établies précédemment et qui sont bien connues resteront dès lors applicables ici, en y substituant aux vitesses et aux accélérations les vitesses et accélérations moyennes locales.

En désignant par u', v', w' les composantes, non plus de l'accélération, mais

de l'accélération moyenne locale, u, v, w désignant celles de la vitesse moyenne locale, on aura :

$$(3') \quad \begin{cases} u' = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}, \\ v' = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}, \\ w' = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Les relations (d') du numéro 23 s'appliquent aussi, et si N, T, p_x, p_y, p_z représentent maintenant les valeurs moyennes locales des composantes normales et tangentielles ainsi que de la pression, on aura :

$$(4') \quad \begin{cases} p_x = l\mathrm{N}_1 + m\mathrm{T}_3 + n\mathrm{T}_2, \\ p_y = l\mathrm{T}_3 + m\mathrm{N}_2 + n\mathrm{T}_1, \\ p_z = l\mathrm{T}_2 + m\mathrm{T}_1 + n\mathrm{N}_3. \end{cases}$$

Pour avoir les équations indéfinies du mouvement, il suffit de prendre les équations (g) du numéro 24 et d'y introduire les inerties $-(u', v', w')$, et l'on a ainsi les équations suivantes, qui expriment l'équilibre dynamique et qui seront nos équations indéfinies du mouvement :

$$(14') \quad \begin{cases} \frac{d\mathrm{N}_1}{dx} + \frac{d\mathrm{T}_3}{dy} + \frac{d\mathrm{T}_2}{dz} + \rho\mathrm{X} - \rho u' = 0, \\ \frac{d\mathrm{T}_3}{dx} + \frac{d\mathrm{N}_2}{dy} + \frac{d\mathrm{T}_1}{dz} + \rho\mathrm{Y} - \rho v' = 0, \\ \frac{d\mathrm{T}_2}{dx} + \frac{d\mathrm{T}_1}{dy} + \frac{d\mathrm{N}_3}{dz} + \rho\mathrm{Z} - \rho w = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations, ρ est constant, puisque le fluide est ici homogène et incompressible par hypothèse; u', v', w' ont les valeurs indiquées aux équations (3') et ne sont autre chose que les composantes d'accélération moyenne locale de la matière fluide qui occupe un élément de volume de la masse totale.

M. Boussinesq démontre, d'ailleurs, que les N, T ont les valeurs qui suivent :

$$(12') \quad \begin{cases} \mathrm{N}_1 = -p + 2\varepsilon\frac{du}{dx}, \quad \mathrm{N}_2 = -p + 2\varepsilon\frac{dv}{dy}, \quad \mathrm{N}_3 = -p + 2\varepsilon\frac{dw}{dz}, \\ \mathrm{T}_1 = \varepsilon\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right), \quad \mathrm{T}_2 = \varepsilon\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right), \quad \mathrm{T}_3 = \varepsilon\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right); \end{cases}$$

dans lesquelles ε représente le coefficient de frottement et p la pression qui

serait exercée au point (x, y, z) sur l'unité de surface, si le fluide y était en repos et comprimé comme il l'est effectivement et à la même température. On a vu au numéro 70 que p différait peu des forces normales N_1, N_2, N_3 prises en signe contraire. Elle est exactement égale à leur moyenne, car on a, d'après les équations (12'),

$$-\frac{1}{3}\left(N_1+N_2+N_3\right)=p-\frac{2}{3}\varepsilon\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right),$$

d'où, en vertu de l'équation (1')

$$p=-\frac{1}{3}\left(N_1+N_2+N_3\right).$$

En substituant, dans les trois équations (14'), les valeurs des N, T en fonction de p, de ε et des $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$ tirées des équations (12') et les valeurs de u', v', w' tirées des équations (3'), et en joignant aux trois équations (14') ainsi transformées l'équation (1'), on aura, entre les quatre quantités u, v, w, p, quatre équations qui serviront à les déterminer.

Telle est la solution générale de la question du mouvement d'un courant d'eau en tenant compte des frottements. Malheureusement, les intégrations nécessaires pour dégager les valeurs de u, v, w, p ne peuvent se faire d'une manière générale, et l'on est forcé, dès lors, de s'en tenir aux cas particuliers qui permettent de faire ces intégrations, et dans lesquels on est même obligé le plus souvent de se contenter d'approximations.

La marche indiquée ici n'est autre, du reste, que celle qui a été suivie dans l'article précédent relatif au cas de la mobilité absolue du fluide et dans lequel les composantes tangentielles T sont nulles. La seule différence est que, si les calculs doivent conduire à des résultats incontestablement plus exacts, ils sont certainement beaucoup plus compliqués.

Lorsque les frottements sont négligeables, on a

$$N_1=N_2=N_3=-p, \qquad T_1=T_2=T_3=0,$$

et les équations (14') deviennent :

$$(14'\,bis)\qquad \begin{cases} \frac{dp}{dx}=\rho\left(X-u'\right), \\ \frac{dp}{dy}=\rho\left(Y-v'\right), \\ \frac{dp}{dz}=\rho\left(Z-w'\right). \end{cases}$$

Ces équations reproduisent exactement les équations (E_1) du numéro 83; mais u', v, w' y représentent les composantes de l'accélération moyenne locale, tandis que, dans les équations (E_1), elles représentent les composantes de l'accélération vraie. D'où l'on conclut avec M. Boussinesq que, dans *tous les cas où les frottements sont négligeables, les équations connues de l'hydrodynamique régissent aussi les mouvements tourbillonnaires et discontinus des fluides, pourvu qu'on y introduise au lieu des vitesses et des pressions vraies à chaque instant leurs valeurs moyennes locales.*

Je viens d'exposer les bases essentielles de la théorie de M. Boussinesq, et il faut y ajouter celle de l'hypothèse du mouvement par filets; seulement le filet est autrement défini que dans ce qui précède. Au lieu d'être la ligne à laquelle les vitesses vraies resteraient constamment tangentes à un moment donné, le filet sera ici *la ligne à laquelle seront tangentes, à un moment donné, toutes les vitesses moyennes locales construites en chacun de ses points, ou plutôt un faisceau composé de lignes pareilles et ayant une section normale très petite.*

Ces filets seraient fixes dans le cas du mouvement permanent, mais les molécules fluides ne les suivraient pas. Cela n'arriverait, en effet, que si, en chaque point, les vitesses moyennes locales se confondaient avec les vitesses vraies, c'est-à-dire s'il y avait continuité absolue dans le mouvement, comme nous l'avons supposé dans tout l'article 1er de ce chapitre.

Je ferai remarquer maintenant l'analogie, sinon l'identité, complète qu'il y a entre les équations (12') et celles que Lamé a données pour le cas des solides homogènes et d'élasticité constante; ces équations, que l'on trouve à la page 51 des leçons sur l'élasticité des corps solides, sont :

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}, \qquad N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy}, \qquad N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz},$$

$$T_1 = \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right), \qquad T_2 = \mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right), \qquad T_3 = \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right).$$

λ et μ sont deux coefficients, et θ a pour valeur

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz};$$

u, v, w représentent dans ces équations les composantes du déplacement moléculaire et θ est la dilatation cubique, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ représentant les dilatations linéaires suivant les trois axes rectangulaires des coordonnées. En faisant dans ces formules $\lambda\theta = -p$, $\mu = \varepsilon$ et u, v, w représentant maintenant les

composantes de la vitesse moyenne locale, on reproduit exactement les relations (12'). Quant à ces dernières, elles avaient déjà été établies par des démonstrations antérieures à celle qu'en a donnée M. Boussinesq. On les trouve en effet au XXme cahier ou *Journal de l'École polytechnique*, page 149, dans un mémoire de Poisson, et Navier les avait données le premier dans un mémoire de l'Institut. M. de Saint-Venant les a démontrées dans une note présentée à l'Académie des sciences le 27 novembre 1843 (*Comptes rendus*, tome XVII, pages 1240-1243), en partant de la seule hypothèse que, sur un élément plan quelconque, la force élastique tangentielle est nulle dans la direction où il n'y a pas de vitesse de glissement. M. Kleitz en a donné aussi une démonstration complète dans son ouvrage sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement (pages 68-72).

M. de Saint-Venant donne, d'ailleurs, ces équations sous la forme suivante, en se servant des notations de Coriolis, dont la première idée remonte à Lamé, ainsi que je l'ai indiqué au numéro 24 (chapitre 1er de l'introduction) :

$$p_{xx} = p - 2\varepsilon\frac{du}{dx}, \qquad p_{yy} = p - 2\varepsilon\frac{dv}{dy}, \qquad p_{zz} = p - 2\varepsilon\frac{dw}{dz},$$

$$p_{yz} = -\varepsilon\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right), \qquad p_{zx} = -\varepsilon\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right), \qquad p_{xy} = -\varepsilon\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right);$$

d'où l'on déduirait, par l'équation de continuité (1'),

$$p = \frac{1}{3}\left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}\right).$$

Ces équations sont les mêmes que les équations (12') et que celles de M. Kleitz, aux notations et aux signes près, cette interversion des signes tenant à ce que M. de Saint-Venant a considéré comme négatives les forces élastiques agissant sur les plans coordonnés suivant les x, y, z positifs, tandis que les autres auteurs ont adopté la convention inverse.

M. de Saint-Venant avait indiqué que les formules qui viennent d'être données pouvaient s'appliquer à tous les cours d'eau, à la seule condition que ε fût une fonction qui, au lieu de rester constante pour un même fluide, comme l'avait supposé Navier, restât constante seulement pour chaque point et pût varier d'un point à un autre du fluide. Ce géomètre éminent avait fait remarquer déjà, à l'occasion de ces formules, que, dans le désordre tourbillonnaire apparent que présentent les cours d'eau à l'observateur, il n'en existait pas moins une certaine continuité très réelle dans la variation de grandeur et de

direction des vitesses que l'on peut appeler *moyennes locales*, et qui sont les plus importantes à considérer, puisque ce sont celles qui déterminent la translation des éléments finis du courant et que l'on mesure au moyen des flotteurs, moulinets et autres appareils employés dans la pratique. Les équations données plus haut subsistent donc pour tout courant fluide, à la condition que u, v, w soient les composantes des vitesses moyennes locales et que les forces intérieures p_{xx}, etc. soient aussi moyennes locales.

M. Boussinesq a été plus loin et il a démontré pour chacune des relations entre les vitesses et les pressions vraies que donne l'hydrodynamique, dans l'hypothèse abstraite de la mobilité absolue, que ces relations s'appliquaient encore au cas général que nous traitons ici, à la seule condition d'y remplacer les vitesses et les pressions vraies par les vitesses et les pressions moyennes locales, et il a donné ainsi toute leur rigueur aux bases de sa théorie.

112. *Expression approchée de* ε. — Le coefficient ε doit, en chaque point, dépendre de la température, peut-être de la pression, mais surtout de l'agitation moyenne du fluide, qui est certainement la cause prédominante, de sorte que ε serait une fonction qui devrait devenir sensiblement nulle dans tout point où l'agitation tourbillonnaire elle-même serait nulle, et dont la valeur devrait augmenter rapidement avec elle.

L'agitation tourbillonnaire dépend de bien des éléments, mais sa cause prédominante est certainement l'action de la paroi. C'est près de la paroi que les tourbillons se forment ordinairement, et c'est de là qu'ils se propagent vers le milieu du courant.

Après avoir analysé avec grand soin tous les éléments de cette action perturbatrice, M. Boussinesq considère ce qui se passe dans un tuyau ou dans un canal découvert dont l'axe serait *sensiblement rectiligne*, et où les sections normales à l'axe varieraient peu de l'une à l'autre dans leur forme et leur grandeur. Dans ce cas, les filets fluides sont *sensiblement normaux* aux sections, et l'agitation tourbillonnaire ne peut guère être affectée par leur divergence non plus que par la légère variation de courbure de la paroi dans le sens longitudinal de l'axe. Il en serait tout autrement, au contraire, si l'inclinaison des filets et la courbure des parois variaient d'une manière notable.

On pourra donc supposer que le coefficient ε diffère peu, aux différents points d'une section, de ce qu'il serait si tous les filets fluides étaient parallèles, qu'il ne dépend, par conséquent, que de l'état du liquide sur la section même, et son expression s'obtiendra, dès lors, en la supposant proportionnelle

aux causes qui font annuler ou croître l'agitation tourbillonnaire quand elles s'annulent ou croissent elles-mêmes.

M. Boussinesq a considéré les deux formes types de la section normale pour lesquelles le frottement à la paroi a l'influence la plus petite et la plus grande, et entre lesquelles sont comprises la plupart des formes que l'on rencontre dans la pratique, savoir le rectangle très allongé et le cercle, et il a pris les quatre cas suivants :

1° Tuyau à section rectangulaire de base indéfinie et de hauteur $2h$;

2° Canal découvert à section rectangulaire de base indéfinie et de hauteur h;

3° Tuyau circulaire de rayon R;

4° Canal découvert demi-circulaire de rayon R.

Le coefficient ε doit, d'après les considérations générales qui viennent d'être indiquées, être sensiblement proportionnel à la vitesse u_0 à la paroi, au rapport $\frac{\omega}{\chi}$ de la section, au périmètre mouillé ou rayon moyen R_m déjà défini au numéro 108, qui est égal à h dans le rectangle à base indéfinie et à $\frac{R}{2}$ dans le cas de la section circulaire de rayon R.

Dans le rectangle à base indéfinie, qu'il s'agisse d'un tuyau ou d'un canal découvert, ε serait *sensiblement constant* aux divers points d'une section; car les surfaces parallèles aux parois sont toutes de même grandeur, et l'agitation tourbillonnaire en s'y propageant ne peut ni se concentrer ni se disperser. Dans la section circulaire ou demi-circulaire cette agitation se propage à partir de la paroi sur des cylindres ou demi-cylindres ayant des rayons r de plus en plus petits, et elle se concentre dans le rapport de R à r.

On est conduit aussi, ρg étant le poids de l'unité de volume du fluide, à adopter pour ε les deux expressions suivantes, dont la première s'appliquerait à la section rectangulaire très large et la seconde à la section circulaire :

$$(13') \qquad \begin{cases} \varepsilon = \rho g \,.\, A h u_0, \\ \varepsilon = \rho g \cdot A \frac{R}{2} u_0 \frac{R}{r}. \end{cases}$$

ε n'étant pas, d'ailleurs, rigoureusement proportionnel à u_0 et au rayon moyen h ou $\frac{R}{2}$, le coefficient A doit être regardé, non comme absolument constant, mais comme pouvant varier très lentement avec la vitesse à la paroi et le rayon moyen. Les expériences de M. Bazin permettent d'admettre qu'il ne varie que très peu avec la vitesse, mais qu'il diminue à mesure que le rayon moyen

augmente, et que ces variations deviennent insensibles quand le rayon moyen est un peu grand. Il aura, d'ailleurs, des valeurs différentes suivant le degré de rugosité de la paroi.

Lorsque la section a une forme quelconque, M. Boussinesq est arrivé pour ε, en prenant le plan des y, z parallèle à celui de la section, à l'expression

$$(13'\,bis) \qquad \varepsilon = \rho g \cdot A \frac{\omega}{\chi} u_0 F\left(\frac{\chi y}{\omega}, \frac{\chi z}{\omega}\right),$$

dans laquelle la fonction F dépendrait de la figure de la section.

113. *Cas où les filets sont sensiblement rectilignes et parallèles. — Première conséquence importante.* — Lorsque les filets peuvent être regardés comme sensiblement rectilignes et parallèles, on peut supposer qu'ils sont très peu inclinés sur les x positifs, puisqu'on peut toujours choisir l'axe des x de manière qu'il en soit ainsi; les composantes v et w seront des quantités de premier ordre de petitesse, et l'équation (1′) montre qu'il en sera de même de $\frac{du}{dx}$. Si donc on substitue dans les équations (12′) la valeur de ε donnée par les expressions (13′) et (13′ *bis*), le coefficient A étant très petit nécessairement dans le cas qui nous occupe, on pourra négliger comme étant d'ordre supérieur de petitesse les termes affectés à la fois du coefficient A et d'une des dérivées de u, v, w autre que celle de u en y ou en z, et les équations (12′) deviennent :

$$(15') \qquad \begin{cases} N_1 = N_2 = N_3 = -p, \\ T_1 = 0, \quad T_2 = \varepsilon \frac{du}{dz}, \quad T_3 = \varepsilon \frac{du}{dy}. \end{cases}$$

Les dérivées de T_3 par rapport à x sont négligeables aussi, car, si l'on remonte aux équations (13′), (13′ *bis*), il est facile de voir que $\frac{d\varepsilon}{dx}$ sera comparable au produit de A par la dérivée en x de $\frac{\omega}{\chi}$, tous deux très petits. On pourra donc négliger $\frac{d\varepsilon}{dx}$ et à plus forte raison $\varepsilon \frac{d^2u}{dy\,dx}$ et $\varepsilon \frac{d^2u}{dz\,dx}$.

Les équations (14′) peuvent, dès lors, se mettre ici sous la forme suivante :

$$(16') \qquad \begin{cases} \frac{1}{\rho}\left(\frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz}\right) + \left(X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right) = u', \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y - v', \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z - w. \end{cases}$$

Si maintenant, au moyen de l'équation de continuité (1'), on élimine $\frac{du}{dx}$ de la première des équations (3'), $\frac{dv}{dy}$ de la seconde et $\frac{dw}{dz}$ de la troisième, ces équations deviendront :

$$(17')\quad \begin{cases} u' = \frac{du}{dt} - u^2\left(\frac{d\frac{v}{u}}{dy} + \frac{d\frac{w}{u}}{dz}\right), \\ v' = \frac{dv}{dt} + u^2\frac{d\frac{v}{u}}{dx} - v^2\frac{d\frac{w}{v}}{dz}, \\ w' = \frac{dw}{dt} + u^2\frac{d\frac{w}{u}}{dx} - w^2\frac{d\frac{w}{u}}{dy}. \end{cases}$$

Si l'on se rappelle qu'il s'agit ici du cas où les filets sont très faiblement inclinés sur les x et où, dès lors, v et w sont très petits, on voit que le dernier terme du second membre des deux dernières de ces trois équations est négligeable comme étant d'ordre supérieur de petitesse, et il serait même rigoureusement nul si les filets étaient parallèles à l'un des plans des xz et des xy, puisque alors on aurait $v = 0$, $w = 0$.

Si l'on multiplie, après y avoir annulé les termes négligeables que nous venons d'indiquer, les deux dernières des équations (16') respectivement par ρdy et ρdz et qu'on les ajoute, elles donnent, pour l'expression de la variation de la pression le long d'une petite ligne normale aux x,

$$dp = \rho(Ydy + Zdz) - \rho(v'dy + w'dz),$$

expression qui se réduit à la variation hydrostatique $\rho(Ydy + Zdz)$ de cette pression dès que v' et w' sont négligeables, ce qui arrive lorsque les filets sont très peu inclinés sur les x, comme on l'a supposé plus haut; d'où résulte cet important principe que *la pression varie hydrostatiquement le long de toute ligne qui coupe normalement des filets sensiblement parallèles et rectilignes.*

Ce principe trouvera plus d'une fois son application dans la 2me section (partie pratique).

114. *Conditions relatives aux surfaces limites.* — Les surfaces limites sont les surfaces des parois du canal dans lequel coule le liquide et de plus la surface libre lorsque le canal est découvert.

Sur les parois supposées peu inclinées sur l'axe des x, c'est-à-dire à peu près parallèles à cet axe, comme cela a, du reste, lieu dans la plupart des

canaux naturels, toute molécule qui serait un seul instant sur la surface limite et animée de sa vitesse moyenne locale resterait constamment sur cette surface. Si l, m, n désignent les cosinus des angles que fait avec les axes des coordonnées la normale à la paroi au point (x, y, z), la condition que les vitesses soient, aux parois, tangentes à la surface fluide sera

$$(18') \qquad lu + mv + nw = 0.$$

Il faut, de plus, que l'effort exercé sur la paroi par le fluide intérieur soit, en chaque point de cette paroi, égal et contraire à celui qu'exerce sur elle le milieu environnant. Des trois cosinus l, m, n le premier est très petit, eu égard à la faible inclinaison sur les x que nous supposons aux filets, et si p_x, p_y, p_z sont les composantes de l'effort extérieur rapportées à l'unité de surface, les formules (4') donneront

$$p_x = l\mathrm{N}_1 + m\mathrm{T}_3 + n\mathrm{T}_2,$$
$$p_y = l\mathrm{T}_3 + m\mathrm{N}_2 + n\mathrm{T}_2,$$
$$p_z = l\mathrm{T}_2 + m\mathrm{T}_1 + n\mathrm{N}_3.$$

Si l'on substitue, dans ces équations, pour les N, T, leurs valeurs tirées des équations (15'), on aurait, en négligeant les termes affectés à la fois de ε et de l,

$$(20') \qquad \begin{cases} p_x = -lp + m\mathrm{T}_3 + n\mathrm{T}_3, \\ p_y = -mp, \\ p_z = -np. \end{cases}$$

Les trois composantes de l'effort extérieur peuvent se déduire à deux, l'une $-\mathrm{P}$ normale, l'autre $-\mathrm{F}$ tangente à la surface limite.

Si l'on multiplie les valeurs (20') de p_x, p_y, p_z respectivement par les cosinus l, m, n, et qu'on ajoute les trois équations ainsi obtenues, on aura la valeur de P, qui, en négligeant les termes affectés à la fois de ε et l, après avoir substitué dans la première des équations (20') les valeurs de T_3 et T_2 tirées des équations (15'), deviendra

$$\mathrm{P} = p.$$

En tenant compte de cette valeur, les équations (20') montreraient, d'ailleurs, que la projection de la composante tangentielle $-\mathrm{F}$ suivant l'axe des x

a sensiblement pour valeur mT_3+nT_2, qui, en vertu des relations (15'), vaut $\varepsilon\left(m\frac{du}{dy}+n\frac{du}{dz}\right)$, et que ses composantes suivant les y et les z sont nulles; de sorte que les nouvelles conditions relatives aux surfaces limites deviennent

$$(21')\qquad \begin{cases} P=p, \\ -F=\varepsilon\left(m\frac{du}{dy}+n\frac{du}{dz}\right). \end{cases}$$

F n'est autre chose que l'effort produit sur l'unité de surface par le frottement du fluide sur la paroi, et cette force dépendra, dès lors, du nombre de molécules qui viennent dans l'unité de temps choquer l'unité de surface de la paroi, de la vitesse dont ces molécules sont animées et dont la valeur moyenne est u_0, et du degré de rugosité de la paroi, qui accélère plus ou moins les chocs successifs. On pourra poser, dès lors, et conformément aux résultats des expériences de Girard constatant la proportionnalité du frottement au carré de la vitesse du fluide contre la paroi,

$$(22')\qquad F=\rho g\,.\,Bu_0^2,$$

B étant un coefficient constant pour chaque nature de paroi, mais variable d'une nature de paroi à l'autre; de sorte que la condition des surfaces limites relatives à la paroi deviendra

$$(23')\qquad \varepsilon\left(m\frac{du}{dy}+n\frac{du}{dz}\right)=-\rho g\cdot Bu_0^2.$$

Il faut remarquer, toutefois, que le coefficient B n'est pas absolument constant. Il pourra varier lentement avec le rayon moyen $\frac{\omega}{\chi}$ et même aussi avec u_0.

Le lecteur aura, d'ailleurs, remarqué l'analogie complète de la valeur (22') de F avec l'expression (n) de cette force que j'ai déjà eu l'occasion d'indiquer au numéro 108. Elles ne diffèrent que par la nature de la vitesse et la valeur du coefficient. Dans l'expression (22'), c'est la vitesse à la paroi qui figure, tandis que c'est la vitesse moyenne dans l'expression (n) du numéro 108.

Il reste maintenant à établir les conditions relatives à la surface libre lorsque le mouvement a lieu dans un canal découvert, et pour cela nous supposerons cette surface cylindrique et à génératrice horizontale, celle-ci étant parallèle à l'axe des y; son équation sera, dès lors, de la forme

$$z_1=f(x,t),$$

z_1 désignant son ordonnée parallèle aux z et seulement variable avec x et t.

Si x et z_1 sont les coordonnées, au bout du temps t, d'une molécule se trouvant alors sur cette surface, ces coordonnées, au bout du temps $t+dt$, seront $x+udt$ et z_1+wdt, et la molécule devra encore se trouver sur la surface, ce qui entraîne la condition

$$(19') \qquad w=\frac{dz}{dt}+u\frac{dz_1}{dx}.$$

Il faut remarquer maintenant qu'à la surface libre la pression est nécessairement égale à la pression atmosphérique, ainsi que cela ressort de ce qui a été dit au numéro 77, et l'atmosphère, lors même qu'elle serait elle-même agitée de mouvements tourbillonnaires, n'exercerait sur le frottement F, à raison de la faiblesse relative de sa densité, qu'une action insensible et que l'on peut absolument négliger. Comme, d'ailleurs, l'axe des y est par hypothèse parallèle au profil transversal de la surface libre, on a $m=0$, et les équations (21') deviennent

$$(24') \qquad \begin{cases} p=\text{const.}, \\ \dfrac{du}{dz}=0. \end{cases}$$

En récapitulant ce qui vient d'être dit, on aura, pour les parois, les deux conditions:

$$(18') \qquad lu+mv+mw=0,$$

$$(23') \qquad \varepsilon\left(m\frac{du}{dy}+n\frac{du}{dz}\right)=-\rho u\cdot Bu_0,$$

et, pour la surface libre, les trois conditions :

$$(19') \qquad w=\frac{dz_1}{dt}+u\frac{dz_1}{dx},$$

$$(24') \qquad \begin{cases} p=\text{const.}, \\ \dfrac{du}{dz}=0. \end{cases}$$

Il y a pour la surface libre une condition de plus que pour la paroi, ce qui tient à ce qu'il y a une inconnue de plus à déterminer, qui est l'ordonnée z_1.

Il reste maintenant à mettre en œuvre les équations fondamentales établies dans ce qui précède, et pour cela je suivrai l'ordre qu'a suivi M. Boussinesq et que j'ai, d'ailleurs, aussi indiqué dans ma préface pour la partie de mon livre qui traitera plus spécialement de l'hydraulique pratique. J'étudierai d'abord le mouvement permanent ou à débit constant, et j'arriverai ensuite au mouvement non permanent ou à débit variable.

§ 2. — Du mouvement permanent ou à débit constant.

115. *Équation générale du mouvement permanent.* — Le caractère essentiel du mouvement permanent est, comme je l'ai déjà établi aux numéros 94 et 101 *bis*, que les dérivées de u, v, w par rapport à t sont nulles, et que le débit par seconde du courant reste constant dans toute l'étendue de ce courant, ainsi que cela se déduit immédiatement de l'équation de continuité. Il faut remarquer de plus que $\frac{v}{u}$, $\frac{w}{u}$ mesurent les angles très petits que font avec l'axe des x les projections des filets sur les plans des xy et des xz. Admettons que l'inclinaison des filets sur l'axe des x ne varie que très graduellement d'une section à l'autre, de manière à ne différer notablement que sur des sections très éloignées l'une de l'autre, ce qui arriverait, par exemple, dans un tuyau dont l'axe serait rectiligne ou très peu courbe et dont la section varierait lentement, ou dans un canal découvert de forme prismatique dont la surface libre serait plane ou à très faible courbure, et dans lequel la section ne varierait toujours que très lentement. On peut supposer aussi que les dérivées en x des deux rapports $\frac{v}{u}$, $\frac{w}{u}$ sont très petites par rapport aux dérivées premières en y et z de ces mêmes rapports.

En tenant compte de ces diverses indications, les deux dernières des équations (17') du numéro 113 donneraient

$$v' = 0, \qquad w' = 0.$$

Y et Z étant, d'ailleurs, ici, les composantes de la pesanteur suivant les y et les z, qui sont constantes, les deux dernières des équations (16') du numéro 113, multipliées respectivement par ρdy et ρdz et ajoutées, donnent

$$\frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz = \rho\left(Ydy + Zdz\right),$$

et cette équation, intégrée aux différents points de la section transversale, donne, puisque Y et Z sont constantes,

$$(25') \qquad p = p_0 + \rho(Yy + Zz);$$

p_0 désignant la valeur de p au point d'intersection de l'axe des x avec cette section.

Cette expression n'est autre que celle de la pression hydrostatique, et de ce que la pression varie suivant la loi hydrostatique dans toute l'étendue d'une

même section, il suit immédiatement *que, s'il y a une surface libre, son profil transversal ne peut être qu'horizontal.*

En portant la valeur de p tirée de l'équation (25') dans la première des équations (16'), celle-ci devient

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}\right)+\left(X-\frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx}\right)=u'.$$

On peut, d'ailleurs, remplacer l'axe des x par un axe légèrement courbe coïncidant avec lui entre deux abscisses infiniment voisines et passant par les centres de gravité des sections normales, si l'on considère un tuyau, ou coïncidant avec un filet fluide de la surface libre, si l'on considère un canal découvert. Chaque section normale est ainsi déterminée par une abscisse s comptée sur cet axe courbe à partir d'une origine quelconque, et c'est dans le plan de cette section que seront comptés les y et les z. Si l'on désigne, d'ailleurs, par I l'inclinaison sous l'horizon de l'axe des x ou de l'élément ds, on aura

$$dx=ds,$$
$$X=g\sin I,$$

et ces valeurs, étant substituées dans l'équation précédente, celle-ci devient

$$(26')\qquad \frac{1}{\rho g}\left(\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}\right)+\sin I-\frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx}=\frac{u'}{g}.$$

M. Boussinesq, après avoir multiplié cette équation par $dy\,dz$ ou l'élément $d\omega$ de la section, procède à diverses opérations ou intégrations qui ont pour résultat de déduire de l'équation (26') la suivante :

$$(27'\ ter)\qquad -\int_\chi Bu_0 d\chi+\left(\sin I-\frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right)\omega=\frac{1}{g}\int_\omega u'd\omega.$$

Je n'ai pas à reproduire les détails de ces calculs. On les trouvera dans l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, § VI, numéros 21 et 22, et je me contente d'indiquer ici le résultat des opérations.

Si l'on désigne par U la vitesse moyenne dans la section, on aura

$$(28')\qquad U=\int_\omega \frac{u\,d\omega}{\omega},$$

et si l'on pose d'ailleurs

$$(29')\qquad 1+\eta=\int_\omega \frac{u^2}{U^2}\frac{d\omega}{\omega},$$

l'équation (26') se transforme, par les calculs de M. Boussinesq, dans la suivante :

$$(31') \qquad \sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = \frac{1}{\omega}\int_\chi B u_0^2 d\chi + \frac{U}{g}\frac{d}{ds}\left[(1+\eta)U\right].$$

Les intégrales $\int_\chi \int_\omega$ indiquent, d'ailleurs, que l'intégration s'applique à tout le contour ou à toute l'aire de la section.

Cette équation (31') est l'équation la plus générale du mouvement permanent, puisqu'elle tient compte, au moins approximativement, des frottements, que nous avons négligés dans la théorie de la mobilité absolue traitée à l'article 1er.

116. *Cas de la section rectangulaire très large.* — Lorsque la section est un rectangle très allongé, M. Boussinesq fait subir d'ingénieuses transformations à l'équation indéfinie (26') et simplifie les équations (18'), (19'), (23'), (24') relatives aux parois et à la surface libre. Lorsque le mouvement est permanent, comme ici, on a

$$\frac{dz}{dt} = 0,$$

et l'équation (19') devient

$$w = u\frac{dz_1}{dx};$$

mais, eu égard à l'adoption de notre axe, qui, dans le cas d'un canal découvert, est un des filets de la surface libre elle-même, on a aussi

$$\frac{dz_1}{dx} = 0,$$

d'où $w = 0$ pour la surface libre. En tenant compte de ces conditions, l'analyse de M. Boussinesq l'a conduit, en définitive, à l'équation

$$(34') \qquad A h u_0 \cdot \frac{d^2u}{dz^2} + \left(\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right) = -\frac{u^2}{g\omega}\frac{d\omega}{ds}.$$

Il faut se rappeler, d'ailleurs, que la hauteur du rectangle de la section est $2h$ dans le cas d'un tuyau et h dans celui d'un canal découvert.

Pour les conditions relatives aux surfaces limites, les équations (18') et (19') ont été satisfaites et les équations (23') et (24') deviennent

$$(35') \qquad \pm A h \frac{du}{dz} = -B u_0 \text{ (pour } z = \pm h),$$

pour le cas d'un tuyau plein. Pour celui d'un canal découvert, elles deviennent, en vertu de (25'),

$$(36')\qquad \begin{cases} Ah\dfrac{du}{dz} = -Bu_0 \text{ pour } z = h, \\ \dfrac{du}{dz} = 0 \text{ pour } z = 0, \\ p_0 = \text{const.} \end{cases}$$

117. *Cas de la section circulaire.* — Lorsque la section est circulaire le tuyau étant plein, ou demi-circulaire le fluide coulant à plein bord sous une surface libre à pression constante, M. Boussinesq transforme l'équation (26') dans la suivante :

$$(39')\qquad A\frac{R}{2}u_0\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right)r = -\frac{u^2 r}{g\omega}\frac{d\omega}{ds},$$

à laquelle il faut joindre les conditions relatives aux surfaces limites. Les équations (18') et (19') et la seconde des équations (24') sont satisfaites identiquement; l'équation (23'), dans laquelle il faut faire $m = \frac{y}{r}$, $n = \frac{z}{r}$, en y substituant pour T_3 et T_2 les valeurs $\left(\varepsilon\frac{du}{dr}\right)\frac{y}{r}$ et $\left(\varepsilon\frac{du}{dr}\right)\frac{z}{r}$ qu'ils prennent ici, et pour ε sa valeur tirée de (13'), devient

$$(40')\qquad A\frac{R}{2}\frac{du}{dr} = -Bu_0 \text{ pour } z = R,$$

et, si le canal est découvert à section demi-circulaire, on aura, en outre, pour la surface libre,

$$(40'\ bis)\qquad p_0 = \text{const.}$$

Il s'agit maintenant d'appliquer les groupes d'équations auxquelles on vient d'arriver, tant pour la section rectangulaire très large que pour la section circulaire, et, pour cela, M. Boussinesq a commencé par le cas le plus simple du mouvement permanent, qui est le mouvement uniforme, son type de fixité le plus parfait, ce qui lui a procuré l'occasion de constater que les formules particulières auxquelles il était conduit par déduction étaient suffisamment d'accord avec les expériences les plus connues sur le mouvement uniforme pour donner une sanction pratique aux formules générales dont elles étaient déduites, et permettre de partir ensuite de ces formules générales avec plus de confiance pour analyser des cas plus compliqués du mouvement permanent.

118. *Application au mouvement uniforme.* — Considérons d'abord le cas de la section rectangulaire allongée.

Reprenons l'équation (34') :

$$Ahu_0 \frac{d^2u}{dz^2} + \left(\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right) = -\frac{u^2}{g\omega}\frac{d\omega}{ds}.$$

Remarquons d'abord que, le mouvement étant uniforme par hypothèse, ω et u_0 deviennent constantes, ce qui donne

$$Ahu_0 \frac{d^2u}{dz^2} + \left(\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right) = 0.$$

En multipliant par dz cette équation, intégrant à partir de $z = 0$ et remarquant que la dérivée $\frac{du}{dz}$ est nulle pour $z = 0$, par raison de symétrie et de continuité s'il s'agit d'un tuyau, et en vertu de la seconde des conditions (36') s'il s'agit d'un canal découvert, il vient

$$(41') \qquad Ahu_0 \frac{du}{dz} + \left(\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right) z = 0.$$

Si l'on applique cette formule pour $z = \pm h$ dans le cas d'un tuyau, et pour $z = h$ dans celui d'un canal découvert, elle devient, en vertu des équations (35') et (36'),

$$(42') \qquad \sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = Bu_0^2.$$

En vertu de cette équation et de la relation (35') ou de la relation (36'), suivant qu'il s'agira d'un tuyau ou d'un canal découvert, l'équation (41') se réduira à la relation très simple

$$\frac{1}{u_0}\frac{du}{dz} = -\frac{B}{A}\frac{z}{h^2},$$

qui, multipliée par dz et intégrée, en remarquant que l'on a $u = u_0$ pour $z = h$, donne la suivante :

$$(43') \qquad \frac{u}{u_0} = 1 + \frac{B}{2A}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right).$$

Cette équation et l'équation (42') résolvent complètement la question, puisque de l'équation (42') on peut tirer la valeur de u_0 ou de la vitesse à la paroi et que l'équation (43') donne ensuite la vitesse aux différents points de la section.

On peut, d'ailleurs, facilement introduire dans l'expression (42') la vitesse moyenne U. Il suffit, pour cela, de multiplier l'équation (43') par $\frac{dz}{h}$ et d'intégrer de $z=0$ à $z=h$, et en remarquant que U a ici pour expression

$$(44') \qquad U=\int_0^h u\cdot\frac{dz}{h},$$

il viendra ainsi

$$(45') \qquad \frac{U}{u_0}=1+\frac{B}{3A}.$$

Au moyen de cette nouvelle relation, on éliminera u_0 de (42') et de (43'), puis U de (43') en se servant de (42') transformée, et l'on obtiendra le rapport de la vitesse maxima u_m, valeur de u pour $z=0$, à la vitesse moyenne U, et, si l'on pose

$$b=\frac{B}{\left(1+\frac{B}{3A}\right)^2}, \qquad c=\frac{B}{2A}\frac{1}{\sqrt{B}}, \qquad m=\frac{1}{2}\frac{\frac{B}{3A}}{1+\frac{B}{3A}}=\frac{1}{3}c\sqrt{b},$$

on arrive ainsi aux équations suivantes :

$$(47') \qquad \begin{cases} h\left(\sin I-\frac{1}{\rho g}\cdot\frac{dp_0}{ds}\right)=bU^2, \\ \frac{u}{U}=1+m-3m\frac{z^2}{h^2}, \\ \frac{u_m}{U}=1+m, \\ u=u_m-c\sqrt{h\left(\sin I-\frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right)\frac{z^2}{h^2}}. \end{cases}$$

Si nous nous reportons maintenant à l'équation (29')

$$1+\eta=\int_\omega \frac{u^2}{U^2}\frac{d\omega}{\omega},$$

elle devient ici

$$(48') \qquad 1+\eta=\int_0^h \frac{u^2}{U^2}\frac{dz}{h},$$

d'où l'on tire, en ayant égard à la seconde des équations (47'),

$$(48'bis) \qquad \eta=\frac{4}{5}m^2=\frac{1}{5}\left(\frac{\frac{B}{3A}}{1+\frac{B}{3A}}\right)^2.$$

Passons maintenant au cas de la section circulaire. En prenant les équations de condition des surfaces limites qui correspondent à ce cas, en partant de l'équation (39′) et en faisant des calculs analogues à ceux qui viennent d'être expliqués pour la section rectangulaire, M. Boussinesq arrive, en posant d'ailleurs

$$b_1 = \frac{B}{\left(1+\frac{2B}{5A}\right)^2}, \qquad c_1 = \frac{2B}{3A}\frac{1}{\sqrt{B}}, \qquad m_1 = \frac{2}{3}\frac{\frac{2B}{5A}}{1+\frac{2B}{5A}} = \frac{2}{5}c_1\sqrt{b_1},$$

au système d'équations suivant :

$$(55') \qquad \begin{cases} \frac{R}{2}\left(\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right) = b_1 U^2, \\ \frac{u}{U} = 1 + m_1 - \frac{5}{2}m_1\frac{r^3}{R^3}, \\ \frac{u_m}{U} = 1 + m_1, \\ u = u_m - C_1\sqrt{\frac{R}{2}\left(\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right)\frac{r^3}{R^3}}. \end{cases}$$

On a, pour déterminer la valeur r_1 de η qui correspond à la section circulaire, la relation

$$(56') \qquad 1 + \eta_1 = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \frac{u^2}{U^2}\,2\pi r dr = 2\int_0^R \frac{u^2}{U^2}\frac{r}{R}\frac{dr}{R},$$

d'où l'on tire, en substituant pour $\frac{u}{U}$ sa valeur tirée de la seconde des équations (55′),

$$(56'\ bis) \qquad \eta_1 = \frac{9}{16}m_1^2 = \left(\frac{\frac{B}{5A}}{1+\frac{2B}{5A}}\right)^2.$$

M. Boussinesq a traité aussi le cas d'une section quelconque et est arrivé à l'équation

$$(61') \qquad \frac{\omega}{\chi}\left(\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right) = b'U^2.$$

On déduirait immédiatement de cette dernière équation la première des systèmes (47′) et (55′) en donnant à b' la valeur b pour la section rectangulaire et la valeur b_1 pour la section circulaire. M. Boussinesq a montré que ses formules donnaient des résultats sensiblement d'accord avec ceux des expériences

de MM. Darcy et Bazin. Je mentionne le fait sans y insister, puisque j'aurai à revenir en détail sur cette question dans la partie pratique de mon travail; il suffit de savoir ici que cet accord existe.

On remarquera maintenant que, si l'on suppose $p_0 =$ constante, ce qui arrive pour les canaux découverts, l'équation (61') devient

$$\frac{\omega}{\chi} \sin I = b' U^2;$$

sin I n'est autre chose que la pente de superficie égale à la pente de fond dans le mouvement uniforme; $\frac{\omega}{\chi}$ est le rayon moyen R_m; de sorte que l'on peut écrire, si i désigne maintenant la pente par mètre du fond,

$$R_m i = b' U^2,$$

équation qui reproduit exactement, quant à la forme, l'équation (α'_4) que nous avons obtenue au numéro 109,

$$R_m i = B_1 U^2.$$

Les coefficients b' d'un côté, B_1 de l'autre, sont à déterminer par l'expérience, et ces deux coefficients ont, en définitive, les mêmes valeurs. J'ai expliqué, au numéro 109, par quelles expériences on pouvait déterminer directement le coefficient B_1. Le coefficient b' peut se calculer en lui donnant, suivant la forme rectangulaire ou circulaire de la section, la valeur de b ou de b_1 des expressions (46') et (54'). La valeur du coefficient b' peut donc se calculer en fonction des coefficients A et B des frottements intérieur et extérieur qui entrent dans les expressions 13' de ε; mais ces derniers coefficients eux-mêmes ne peuvent se déterminer que par l'expérience.

La brillante analyse de M. Boussinesq conduisant, à travers un réseau de calculs qui deviendrait presque un labyrinthe sans la vive lumière qu'il a su y porter, à une identité de forme aussi complète, il est permis de regarder aujourd'hui comme justifiée, au moins pour les écoulements à travers de grandes sections où l'agitation tourbillonnaire se développe pleinement, la forme monôme de la formule du mouvement uniforme

$$R_m i = B_1 U^2,$$

qui a été donnée au numéro 109.

119. *Formes définitives de l'équation du mouvement permanent.* — Lorsque le mouvement permanent est graduellement varié, c'est-à-dire lorsque le passage d'une section à l'autre se fait sans changements brusques dans la courbure de l'axe ou dans l'aire de la section, les frottements exprimés en fonction des vitesses à la paroi diffèrent très peu de ce qu'ils seraient si le mouvement était uniforme, ou du moins en est-il ainsi dans chaque section, en particulier sur l'élément de longueur de l'axe, et M. Boussinesq peut effectuer, par une méthode assez simple d'approximations successives, l'intégration de ses équations (34'), (39'), etc. Je me contenterai de reproduire ici ses résultats. Posons

$$(84') \qquad \alpha' = 1 + \eta + \beta,$$

η ayant les valeurs (48') et (56') déterminées au numéro 118 pour la section rectangulaire et la section circulaire, et β une quantité très petite relative à la différence de frottement du régime uniforme, qui est le régime permanent fixe, si je puis m'exprimer ainsi, et du régime permanent graduellement varié.

La valeur de β (p. 91 de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*) est pour la section rectangulaire très allongée

$$(80') \qquad \beta = \frac{\frac{4}{45}\frac{B^2}{A^2}\left(1 + \frac{2}{7}\frac{B}{A}\right)}{\left(1 + \frac{2B}{3A}\right)^3};$$

pour la section circulaire, on poserait

$$\alpha_1' = 1 + \eta_1 + \beta_1;$$

n_1 ayant la valeur (56') trouvée au numéro 118, on aurait (p. 85 de l'*Essai*)

$$(93') \qquad \beta_1 = \frac{\frac{4}{25}\frac{B^2}{A^2}\left(1 + \frac{4}{11}\frac{B}{A}\right)}{\left(1 + \frac{2B}{5A}\right)^3}.$$

Enfin, dans le cas d'une section quelconque, M. Boussinesq trouve

$$(93'') \qquad \beta = 2(\alpha - 1 - \eta) = 2\int \frac{u^3}{U^3}\frac{d\omega}{\omega} - 2\int \frac{u^2}{U^2}\frac{d\omega}{\omega},$$

où le rapport $\frac{u}{U}$ peut, avec une approximation suffisante, être calculé dans l'hypothèse d'un régime uniforme.

Cela posé, M. Boussinesq est conduit à présenter définitivement, sous les formes suivantes, l'équation du mouvement permanent

$$(85') \qquad \sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = b\frac{U^2}{h} + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$$

pour le cas de la section rectangulaire allongée,

$$(97') \qquad \sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = 2b_1\frac{U^2}{R} + \alpha_1'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$$

pour le cas de la section circulaire, et

$$(106') \qquad \sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = b'\frac{\chi}{\omega}U^2 + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$$

pour le cas d'une section quelconque.

120. *Extension du principe de Bernoulli.* — Si l'on désigne par ζ l'ordonnée verticale comptée de haut en bas à partir d'un plan horizontal fixe passant par le point où la pression est p_0 et où l'axe des s perce la section sur laquelle a lieu la vitesse moyenne U, l'augmentation de ζ le long d'un élément ds de l'axe des s aura pour valeur $ds \sin I$, et l'on pourra dès lors écrire l'équation (106') ainsi qu'il suit :

$$\frac{d}{ds}\left(\alpha'\frac{U^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} - \zeta\right) = -b'\frac{\chi}{\omega}U^2.$$

Si la quantité $b'\frac{\chi}{\omega}U^2$, qui représente les frottements extérieurs, était assez petite pour être négligée, il viendrait

$$\frac{d}{ds}\left(\alpha'\frac{U^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} - \zeta\right) = 0,$$

d'où

$$\alpha'\frac{U^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} - \zeta = \text{const.}$$

Cette relation est exactement la même, à cela près que le terme $\frac{U^2}{2g}$ y est affecté du coefficient α', que l'équation (δ) du numéro 96, de laquelle a été déduit le principe de Bernoulli. On peut conclure de là que ce principe est encore applicable au mouvement permanent graduellement varié, à la seule condition d'affecter le terme $\frac{U^2}{2g}$ du coefficient α', chaque fois que le frottement contre les parois sera négligeable ou que, du moins, ses effets seront masqués dans le mouvement général. C'est ce qui arrive, par exemple, dans un grand

réservoir où l'influence des frottements aux parois deviendrait insensible sur l'écoulement de l'eau par un orifice percé dans la paroi, surtout s'il l'était à une assez grande distance du fond et des côtés du réservoir.

121. *Forme donnée à l'équation du mouvement permanent par M. de Saint-Venant.* — M. de Saint-Venant, dans le rapport qu'il a fait à l'Académie des sciences sur le travail de M. Boussinesq, a écrit l'équation (106'), de laquelle se déduiraient, d'ailleurs, les équations (85') et (97') données au numéro 120, de la manière suivante :

$$\frac{dz}{ds}-\frac{1}{\rho g}\frac{dp}{ds}=\frac{\chi}{\omega}B_1U^2+\alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right),$$

ou bien

$$(\varepsilon)\qquad \frac{dz}{ds}-\frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds}=\frac{\chi}{\omega}B_1U^2+\alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right).$$

B_1 ayant les valeurs désignées par M. Boussinesq par b, b_1, b', suivant que la section sera un rectangle très allongé, un cercle, on aura une figure quelconque. Cette manière d'écrire l'équation du mouvement permanent rend sa forme analogue à celle que lui donnait l'ancienne théorie exposée à l'article 1er, car, si l'on différentie par rapport à s l'équation (ε'') du numéro 107, elle devient

$$(\varepsilon_1)\qquad \frac{dz}{ds}-\frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds}=\frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi}+\alpha\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right).$$

Les équations (ε) et (ε_1) ne diffèrent que par leurs seconds membres, l'équation (ε) ne contient que la partie de $\frac{F}{\pi}$ de l'équation (ε_1) qui s'exprime comme dans un mouvement uniforme (B_1U^2), le terme $\alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$ contenant déjà l'autre partie beaucoup plus petite de $\frac{F}{\pi}$, savoir celle qui dépend de la variation du mouvement.

Les quantités α et α' ont d'ailleurs pour valeurs

$$\alpha=\int_\omega\frac{u^3d\omega}{U^3\omega},$$

$$\alpha'=\int_\omega\left(2\frac{u^3}{U^3}\frac{d\omega}{\omega}-\frac{u^2}{U^2}\frac{d\omega}{\omega}\right),$$

ou

$$\alpha'=1+\eta+\beta,$$

ou encore

$$\alpha'=2\alpha-(1+\eta).$$

La troisième de ces expressions servira à calculer α', connaissant les valeurs de η et de β en fonction des coefficients A et B des frottements intérieur et extérieur données aux numéros 118 et 119.

122. *Comparaison de l'ancienne et de la nouvelle théorie, et conclusions définitives sur les équations du mouvement permanent.* — Les savants auxquels on doit l'ancienne théorie du mouvement permanent, Poncelet, Coriolis, Belanger et Vauthier, étaient partis, pour établir l'équation de ce mouvement, du principe des forces vives, et ils avaient été obligés dès lors d'employer les hypothèses du parallélisme des tranches et de supposer, en outre, que les frottements de toute nature avaient, dans chaque tranche, la même intensité que si le mouvement était uniforme avec la même section et la même vitesse moyenne. M. Boussinesq avait, dès 1870, fait voir que ces hypothèses étaient doublement inexactes, et M. de Saint-Venant était arrivé à la même conclusion en 1872[1] et, selon lui, « la question des frottements des fluides avait été longtemps une véritable énigme dont on cherchait mal et, par suite, vainement le mot. »

Comme dans tout mouvement autre que le mouvement uniforme, on n'a, *a priori*, absolument aucune indication sur le travail des forces intérieures, il devient évident que le principe des forces vives doit être abandonné lorsque l'on veut étudier un mouvement non uniforme, et c'est en partant d'un tout autre point de vue que M. Boussinesq a établi sa nouvelle théorie, ainsi que le montrent les détails dans lesquels je suis entré plus haut pour analyser la partie principale de son travail.

Il est facile, en rapprochant les expressions données pour α et α' au numéro précédent, de voir qu'elles sont loin d'être identiques.

La valeur numérique attribuée par Coriolis à α est 1.10, et M. Boussinesq, en donnant à b et b_1 les valeurs numériques résultant des expériences de MM. Darcy et Bazin, est arrivé pour α' à la valeur 1.11, pour laquelle on aurait, il est vrai, $\alpha = 1.066$ seulement, vu qu'on a sensiblement $\frac{\alpha - 1}{\alpha' - 1} = \frac{3}{5}$. Le peu de différence absolue entre α et α' tient donc, comme on voit, à ce que α' et α surpassent peu l'unité, et l'α de Coriolis n'est d'ailleurs aussi voisin de l'α' de M. Boussinesq que parce que Coriolis attribuait, en moyenne, aux filets fluides, des différences de vitesse un peu plus grandes que celles qui existent réellement. Quoi qu'il en soit, la valeur la plus adoptée de α se trouve

[1] *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, tome LXXIV, pages 570, 649, 693, 770, séances des 26 février, 4, 11 et 18 mars 1872.

presque identique à la valeur de α', bien que cela n'arrive ici que par un pur hasard. Il n'en est pas moins vrai que ceux qui ne considèrent que le point de vue pratique, sans se préoccuper du côté philosophique des questions, peuvent être fondés à regarder l'ancienne théorie (du moins celle qui réduisait α à l'unité et qui n'avait pas ainsi de grandes prétentions à l'exactitude) comme suffisante, puisque, tout en donnant des résultats numériques peu différents de ceux que donne la nouvelle, elle est notablement plus simple. C'est évidemment là le premier raisonnement que se fera tout praticien mis aux prises avec les difficultés de la question, et je ne puis m'empêcher, en ce qui me concerne, de le regarder comme un peu fondé. Quoi qu'il en soit, les deux théories conduisent à un même principe général dans lequel se résume, pour la pratique, tout le mouvement permanent, et c'est ce principe qu'il me reste à mettre en lumière.

Reprenons ici l'équation la plus générale du mouvement permanent et écrivons-la sous la forme (ε_1), que lui a donnée M. de Saint-Venant,

$$(\varepsilon_0) \qquad \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds} = \frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi} + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right).$$

S'il s'agissait d'un canal découvert, on aurait $dp = 0$ à la surface libre, et cette équation se réduirait à la suivante :

$$(\varepsilon_0') \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi} + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right).$$

Remarquons maintenant que l'ancienne comme la nouvelle théorie assignent à F une expression de la forme

$$F = \pi B_1 U^2,$$

de sorte que nous aurons, en multipliant d'ailleurs l'équation (ε_0) par ds,

$$\frac{dz}{ds}ds - \frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds}ds = \frac{\chi}{\omega}B_1U^2ds + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)ds.$$

Dans cette expression tous les termes sont immédiatement intégrables, excepté le premier terme du second membre. Si l'on effectue ces intégrations entre deux sections données ω_0 et ω_2 séparées entre elles par la longueur $s_1 - s_0$, comptée sur l'axe des s, et que l'on se contente de laisser l'intégration du terme $\frac{\chi}{\omega}B_1U^2\,ds$ indiquée, il viendra

$$z_1 - z_0 - \left(\frac{p_1 - p_0}{\pi}\right) = \alpha'\frac{(U_1^2 - U_0^2)}{2g} + \int_{s_0}^{s_1}\frac{\chi}{\omega}B_1U^2ds;$$

et si l'on suppose la longueur $s_1 - s_0$ assez petite pour que U ne varie pas sensiblement entre les deux sections ω_0 et ω_1, on pourra, en se rappelant d'ailleurs (n° 108) que l'on peut poser

$$B_1 = \frac{f}{2g},$$

écrire approximativement cette équation comme il suit :

$$z_1 - z_0 - \frac{(p_1 - p_0)}{\pi} - \alpha' \frac{(U_1^2 - U_0^2)}{2g} - \frac{\chi}{\omega} f(s_1 - s_0) \frac{U^2}{2g} = 0.$$

Le premier terme représente la différence des charges z_1 et z_0 sur les sections ω_1, ω_0 du courant fluide, en supposant que le plan horizontal supérieur à partir duquel sont comptés de haut en bas les z se confonde avec la surface libre supérieure du canal dans lequel a lieu le mouvement. La différence $z_1 - z_0 = \zeta_1$ représente la charge sur la section inférieure ω_1 de la colonne ω_0, ω_1, charge aux dépens de laquelle a lieu le mouvement. $\frac{p_1 - p_0}{\pi}$ et $\alpha' \frac{(U_1^2 - U_0^2)}{2g}$ représentent *les diminutions de charge* produites par leur conversion en pression ou en force vive, et $\frac{\chi}{\omega} f(s_1 - s_0) \frac{U^2}{2g}$ représente la *perte* de charge qu'occasionne le frottement contre les parois.

L'équation précédente conduit donc à ce principe que, *dans le mouvement permanent, la charge hydrostatique égale la somme des charges converties soit en pression, soit en forces vives, et qui pourraient se transformer de nouveau en élévation de niveau, et de la charge perdue ou absorbée par les frottements.*

On peut même généraliser encore ce principe en comprenant dans l'équation générale les pertes de charge qui résulteraient de changements brusques de la section[1] ou de coudes entre les deux sections que l'on considère. Chacune de ces pertes de charge peut, en effet, s'estimer par un terme de la forme Mh, comme celle des frottements et comme les transformations de charge en pression ou en vitesse dues au mouvement même, h étant une hauteur due soit à une vitesse, soit à une pression, et M un coefficient à déterminer pour chaque nature de perte ou de transformation de charge: de sorte que, si ζ_1 est la différence des charges sur les sections ω_0 et ω_1, l'équation du mouvement permanent se réduirait à

$$(\varepsilon''_0) \qquad \zeta_1 = \Sigma M h.$$

[1] Il faut se rappeler que les équations de MM. Boussinesq et de Saint-Venant n'ont pu être établies que pour un mouvement graduellement varié et non pour le cas de changements brusques de la section ou de la direction de l'axe.

Cette équation, presque évidente *a priori* d'après la nature même du mouvement permanent, puisqu'elle n'exprime en définitive que l'égalité locale et indépendante du temps entre le travail moteur et le travail résistant, est d'une extrême simplicité et d'une application des plus commodes, ainsi qu'on le verra dans la partie pratique de mon travail.

Nous savons déjà, d'après ce qui a été dit précédemment, estimer les transformations de charge. Pour celles qui sont relatives à la pression, on aurait

$$M = 1,$$

$$h = \frac{p_1 - p_0}{\pi},$$

et, pour celles qui se rapportent à la vitesse,

$$M = \alpha',$$

$$h = \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_0^2}{2g}.$$

Les pertes de charge dues aux frottements (parois, changements brusques de section, coudes, ...) peuvent s'exprimer d'une manière analogue, et leur somme vaudrait ΣNh, N étant un coefficient à déterminer pour chaque nature de perte de charge; de sorte que l'équation (ε_0'') se transforme dans la suivante :

$$(\varepsilon_1) \qquad \zeta_1 = \frac{p_1 - p_0}{\pi} + \alpha'\left(\frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_0^2}{2g}\right) + \Sigma Nh,$$

équation qui, eu égard à l'équation de continuité $\omega_1 U_1 = \omega_0 U_0$, devient

$$\zeta_1 = \frac{p_1 - p_0}{\pi} + \alpha' \frac{U_1^2}{2g}\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) + \Sigma Nh;$$

d'où l'on tirerait

$$(\varepsilon_3) \qquad U_1 = \sqrt{\frac{2g\left(\zeta_1 - \frac{p_1 - p_0}{\pi} - \Sigma nh\right)}{\alpha'\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)}}.$$

Si les pertes de charge dues au frottement étaient nulles ou négligeables, on aurait

$$\alpha' = 1,$$

$$\Sigma Nh = 0,$$

et l'expression précédente ne ferait que reproduire, comme on devait s'y attendre, les expressions (γ_7) et (γ_{15}) des numéros 90 et 91.

Il faut remarquer, d'ailleurs, que dans l'équation

$$\zeta_1 = \Sigma M h,$$

écrite plus haut, tous les termes de $\Sigma M h$ ne sont pas nécessairement positifs; ainsi p_1 peut être plus petit que p_0, et alors le terme $-\left(\frac{p_1 - p_0}{\pi}\right)$ de l'équation (ε_1), qui n'est que la reproduction de la précédente sous une autre forme, devient positif et s'ajoute à la charge ζ_1 au lieu de s'en retrancher.

L'équation (ε_1) se simplifie encore lorsqu'il s'agit d'un canal découvert, puisque, dans ce cas, on a $p_1 - p_0 = 0$, et elle devient

$$(\varepsilon_1') \qquad \zeta_1 - \alpha'\left(\frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_0^2}{2g}\right) = \Sigma N h,$$

à laquelle il faut toujours joindre l'équation de continuité

$$\omega_1 U_1 = \omega_0 U_0 = q,$$

q étant le débit par seconde. On tire de cette dernière

$$U_1 = \frac{q}{\omega_1}, \quad U_0 = \frac{q}{\omega_0},$$

et si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (ε_1), celle-ci devient

$$(\varepsilon_4) \qquad \zeta_1 - \frac{\alpha' q^2}{2g}\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_0^2}\right) = \Sigma N h,$$

équation qui permettrait, étant données q et les valeurs de ω_0 et ω_1, de déterminer la pente totale de superficie ζ_1 entre les deux sections et de déterminer ainsi, de proche en proche, le profil en long du courant d'eau sur toute sa longueur. Réciproquement, étant données les sections ω_0 et ω_1 ainsi que la pente totale ζ_1 entre ces sections, l'équation précédente permettrait de calculer la valeur du débit q. Mais, en pratique, on ne se sert jamais de ce procédé pour calculer le débit d'une rivière, ainsi que je le montrerai dans la partie pratique de mon livre.

Je ferai remarquer maintenant que, si l'on pose

$$\frac{dz}{ds} - \frac{1}{\pi}\frac{dp}{ds} = j,$$

l'équation (ε_0), en y remplaçant d'ailleurs $\frac{F}{\pi}$ par sa valeur B_1U^2, peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$(\varepsilon_5) \qquad j - \frac{\chi}{\omega} B_1 U^2 = \alpha' \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right);$$

j est ce qu'on appelle la *pente hydraulique* de la conduite, c'est une pente fictive, qui se réduit à la pente réelle de superficie I lorsque l'on a affaire à un canal découvert pour la surface libre duquel on aurait $dp = 0$, et, dans ce cas, l'équation du mouvement permanent devient

$$(\varepsilon_6) \qquad I - \frac{\chi}{\omega} B_1 U^2 = \alpha' \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right).$$

123. *Cas où il faut tenir compte de la courbure des filets.* — Tout ce qui vient d'être dit suppose très faibles les courbures des filets fluides, et si les circonstances locales devaient leur faire prendre des courbures plus accentuées, les équations du mouvement permanent, telles qu'elles ont été établies dans ce qui précède, ne s'appliqueraient plus. La question se complique beaucoup lorsqu'il faut tenir compte de cette courbure, et M. Boussinesq l'a traitée, pour le cas d'un canal découvert d'une section rectangulaire très large, dans les paragraphes XVIII et XIX de son *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Je ne cite ici que les résultats de son analyse, qui l'a conduit à l'équation

$$(156') \qquad \frac{U^2h^2}{g}\left(\frac{1}{3}\frac{d^3h}{ds^3} - \frac{1}{2}\frac{d^2i}{ds^2}\right) + \left(h - \frac{\alpha' U^2}{g}\right)\frac{dh}{ds} = hi - bU^2;$$

dans laquelle h désigne la profondeur du canal ou la hauteur de sa section rectangulaire, i la pente du fond par mètre courant. Si q désigne le débit par unité de largeur du canal, on a

$$q = Uh,$$

d'où

$$U = \frac{q}{h},$$

et, si l'on substitue cette valeur de U dans l'équation (156'), celle-ci ne contiendra plus d'autre inconnue que h et ses dérivées en s, ce qui permettra de trouver, pour une valeur donnée de i, celle de h qui lui correspondra et de déterminer, par conséquent, le profil en long du courant d'eau. C'est, d'ailleurs, ici le profil en long du fond qui sert d'axe des s.

On peut, dans l'équation (156'), introduire la pente de superficie I au moyen de la relation évidente

$$(157') \qquad I = i - \frac{dh}{ds},$$

d'où

$$i = I + \frac{dh}{ds}.$$

Si l'on substitue cette valeur de i dans l'équation (156'), divisée par h, que l'on remarque d'ailleurs que l'on a sensiblement

$$(158') \qquad \frac{d^3h}{ds^3} = \frac{h}{U^2}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{U^2}{h}\frac{dh}{ds}\right),$$

en négligeant les carrés et produits des dérivées de h et U vis-à-vis de $\frac{d^3h}{ds^3}$, et que la relation $d(Uh) = 0$, qui exprime ici l'invariabilité du débit, conduit à la relation

$$(159') \qquad \frac{U^2}{h}\frac{dh}{ds} = -\frac{UdU}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2}\right),$$

l'équation (156') deviendra

$$(160') \qquad I = \frac{bU^2}{h} + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) - h^2\left[\frac{1}{3}\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1}{2}\frac{U^2}{gh}\frac{d^2i}{ds^2}\right].$$

Le premier terme du second membre n'est autre que le terme $\frac{\chi}{\omega}bU^2$ appartenant au frottement à la paroi dans les numéros précédents, puisqu'ici on a $\frac{\chi}{\omega} = \frac{1}{h}$[1]; on a d'ailleurs $I = \frac{dz}{ds}$, de sorte qu'en définitive cette équation reproduit l'équation (ε_0') du numéro précédent en y retranchant du terme $\alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$ un nouveau terme valant $h^2\left[\frac{1}{3}\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1}{2}\frac{U^2}{gh}\frac{d^2i}{ds^2}\right]$.

L'équation (160') se prêterait au calcul des pentes successives de superficie I en fonction des pentes i du fond, mais ce calcul ne serait pas facile, même pour le cas le plus simple où le profil en long du fond serait rectiligne ou circulaire et où l'on aurait par conséquent $\frac{d^2i}{ds^2} = 0$.

On peut encore, au moyen des relations (158') et (159') et de la rela-

[1] Si L est la largeur très grande de la section, on a $\frac{\chi}{\omega} = \frac{L + 2h}{Lh}$; mais $2h$ peut se négliger devant L, d'où $\frac{\chi}{\omega} = \frac{1}{h}$.

tion (157'), qui donnerait $\frac{d^2 i}{ds^2} = \frac{d^3 h}{dz^3} + \frac{d^2 I}{ds^2}$, transformer l'équation (160') dans la suivante :

$$(161') \qquad I + \frac{h^2}{2}\frac{U^2}{gh}\frac{d^2 I}{ds^2} = b\frac{U^2}{h} + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{h^2}{6}\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{U^2}{2g}\right).$$

Cette équation se simplifie lorsque l'on peut poser $\frac{d^2 I}{ds^2} = 0$; car elle ne contient plus alors, dans son premier membre, que la pente de superficie I, qui se détermine ainsi directement en fonction de la profondeur h et de la vitesse moyenne U.

Quoi qu'il en soit de ces diverses simplifications, je ne pense pas que les équations qui viennent d'être établies pour le cas où la courbure des filets n'est plus négligeable puissent entrer dans la pratique; les calculs auxquels elles donnent lieu sont trop compliqués pour cela. Il faut donc, à mon sens, se borner, en ce qui concerne le mouvement permanent, aux équations résumées au numéro précédent et qui reposent sur le quasi-parallélisme et la très faible courbure supposée des filets, sauf à corriger les erreurs dues à cette hypothèse par des coefficients à déterminer par l'expérience dans chaque cas particulier, lorsque la courbure des filets doit, par suite des dispositions locales, s'accentuer de manière à acquérir des effets influents.

§ 3. — Du mouvement non permanent ou à débit variable.

124. *Mouvement non permanent dans un tuyau.* — Le mouvement à débit variable, entièrement omis dans tous les anciens traités d'hydraulique, a été étudié théoriquement par MM. de Saint-Venant et Boussinesq; je l'ai étudié aussi, mais d'une manière toute pratique, dans trois mémoires que j'ai présentés à l'Académie des sciences et qui ont été insérés au tome XXI du *Recueil des Savants étrangers*[1]. Les résultats de ces mémoires trouveront naturellement leur place dans la partie pratique de mon ouvrage, et je n'ai dès lors à m'occuper ici que de la question théorique.

M. Boussinesq a commencé par analyser, comme il l'avait fait pour le mouvement permanent, le cas où les mouvements sont graduellement variés ou tels que les dérivées secondes de la section fluide normale ω et de la vitesse moyenne U, ainsi que les carrés et les produits des dérivées premières, ont des

[1] L'ensemble de ces trois mémoires a été couronné par l'Académie des sciences et a obtenu le prix Dalmont de 1873.

valeurs assez petites pour pouvoir être négligées, et il a montré (§ XXVI, n° 120 de l'*Essai sur les eaux courantes*), en se bornant d'abord au cas d'un tuyau plein de liquide, c'est-à-dire au cas où les sections ω ne dépendent pas du temps, que l'équation (31'), donnée au numéro 119, devait être remplacée ici par l'équation

$$\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = \frac{1}{\omega}\int_\chi B u_0^2 d\chi + (1+\eta)\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1}{g}\frac{du}{dt},$$

qui, après diverses transformations, devient, pour une section rectangulaire très large,

$$(85'\ bis) \qquad \sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = b\frac{U^2}{h} + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1+2\eta}{g}\frac{dU}{dt},$$

et, pour une section circulaire,

$$(97'\ bis) \qquad \sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = \frac{2b_1}{R}U^2 + \alpha_1'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1+2\eta_1}{g}\frac{dU}{dt},$$

et, s'il s'agissait d'une section quelconque, on aurait

$$(106'\ bis) \qquad \sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = b'\frac{\chi}{\omega}U^2 + \alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1+2\eta}{g}\frac{dU}{dt}.$$

Ces trois équations ne diffèrent des équations (85'), (97') et (106'), données au numéro 119 pour le mouvement permanent graduellement varié, que par l'addition à leur second membre du terme $\frac{1+2\eta}{g}\frac{dU}{dt}$.

Le mouvement régi par les équations qui viennent d'être posées tend à devenir permanent et a pour limite le mouvement permanent graduellement varié, de même que celui-ci a pour limite le mouvement uniforme.

125. *Mouvement non permanent dans un canal découvert.* — Il s'agit toujours, comme au numéro précédent, d'un mouvement graduellement varié, et, pour l'analyser, M. Boussinesq a traité d'abord le cas particulier d'un canal dont les sections normales sont des rectangles très longs, et dans lequel les mouvements se font parallèlement à un plan vertical perpendiculaire aux sections. Il prend ce plan pour plan des zx et pour axe des s et aussi des x sur une longueur finie très petite le profil longitudinal du fond, et, enfin, pour axe des z une normale au fond, allant de bas en haut.

On aura, en conservant les notations des numéros précédents (111 à 114),

$V=0$ par raison de symétrie; u, w, p et l'ordonnée z_1 de la surface libre, égale à la profondeur h du fluide dans le canal, seront indépendants de y, et, si l'on désigne d'ailleurs par i l'angle de la ligne du fond avec l'horizon, on aura, pour les composantes de la pesanteur,

$$X=g\sin i, \qquad Y=0, \qquad Z=g\cos i,$$

et les équations (1'), (16'), (18'), (19'), (23'), (24'), en y mettant les valeurs (15'), (13'), (17') de T_3, T_2, ε, u', w', deviennent ici :

$$(235')\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{ds}+\dfrac{dw}{dz}=0, \\ Ahu_0\dfrac{d^2u}{dz^2}+\left(\sin i-\dfrac{1}{\rho g}\dfrac{dp}{ds}\right)=\dfrac{1}{g}\left(\dfrac{du}{dt}-u^2\dfrac{d\left(\frac{w}{u}\right)}{dz}\right), \\ \dfrac{1}{\rho g}\dfrac{dp}{dz}=-\cos i-\dfrac{1}{g}\left(\dfrac{dw}{dt}+u^2\dfrac{d\left(\frac{w}{u}\right)}{ds}\right), \\ w=0,\ Ah\dfrac{du}{dz}=Bu_0 \text{ (pour } z=0), \\ w=\dfrac{dh}{dt}+u\dfrac{dh}{ds},\ p=\text{const.},\ \dfrac{du}{dz}=0 \text{ (pour } z=h). \end{array}\right.$$

La première de ces relations conduit à l'équation de continuité

$$\frac{dh}{dt}+\frac{d(Uh)}{ds}=0;$$

on en tire, en effet,

$$w=-\int_0^z\frac{du}{ds}dz,$$

et la valeur de cette intégrale correspondante à $z=h$ étant substituée dans la première équation de la cinquième ligne du groupe (235'), celle-ci devient

$$\frac{dh}{dt}+u\frac{dh}{ds}+\int_0^h\frac{du}{ds}dz=0 \text{ (pour } z=h),$$

soit

$$\frac{dh}{dt}=\frac{d}{ds}\int_0^h udz=0,$$

et si, dans cette dernière, on remplace $\int_0^h udz$ par Uh, U désignant toujours la vitesse moyenne sur la section, elle devient

$$(236')\qquad \frac{dh}{dt}+\frac{d(Uh)}{ds}=0.$$

Cette équation se tirerait, d'ailleurs, immédiatement de l'équation (M'), à laquelle je suis arrivé au numéro 101 *bis*, et qui est

$$(\mathrm{M}') \qquad \frac{d\omega}{dt}+\frac{dq}{ds}=0.$$

Si l'on désigne ici par l la largeur de la section rectangulaire dont h est la hauteur, on aura

$$\omega = lh, \qquad q=\omega \mathrm{U}=lh\mathrm{U}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (M'), celle-ci devient, puisque l est constant,

$$\frac{dh}{dt}+d\frac{(\mathrm{U}h)}{ds}=0,$$

ce qui reproduit bien l'équation (236').

M. Boussinesq, en opérant sur les équations (235'), et en se servant des méthodes d'approximation analogues à celles qu'il avait employées pour analyser le mouvement permanent, arrive, en définitive, aux équations

$$\sin \mathrm{I}=\frac{b\mathrm{U}^2}{h}+\alpha'\frac{d}{ds}\left(\frac{\mathrm{U}^2}{2g}\right)+\frac{1+2\eta}{g}\frac{d\mathrm{U}}{dt}-\frac{\eta-\beta''}{g}\frac{\mathrm{U}}{h}\frac{d\mathrm{U}}{dt},$$
$$\frac{dh}{dt}+d\frac{(h\mathrm{U})}{ds}=0, \qquad \mathrm{I}=i-\frac{dh}{ds}.$$

Dans ces équations, i[1] est la pente par mètre du fond, I étant toujours la pente de superficie et β'' une nouvelle quantité ayant pour valeur

$$\beta''=\frac{\dfrac{2\mathrm{B}^3}{945\,\mathrm{A}^3}}{\left(1+\dfrac{\mathrm{B}}{3\mathrm{A}}\right)^3},$$

η et α' ayant les valeurs indiquées aux numéros 118 et 119.

M. Boussinesq démontre, d'ailleurs, qu'on a généralement, pour toute forme de la section,

$$\mathrm{I}=b'\mathrm{U}^2\frac{\chi}{\omega}+(2\alpha-1-\eta)\frac{d}{ds}\left(\frac{\mathrm{U}^2}{2g}\right)+\frac{1+2\eta}{g}\frac{d\mathrm{U}}{dt}-\frac{\alpha-1-2\eta}{g}\frac{\mathrm{U}}{\omega}\frac{d\omega}{dt};$$

où, comme nous savons, le coefficient $2\alpha-1-\eta$ n'est autre que α'. (Voir le n° 121.)

[1] La pente par mètre d'une ligne est mesurée par la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'horizon ou par son sinus, lorsque, comme dans les cours d'eau ordinaires, cette inclinaison est très faible; les notations i et $\sin i$ sont donc équivalentes avec la petitesse de l'angle.

126. *Simplification des équations.* — M. Boussinesq indique une simplification considérable, qui consiste à supposer que, dans la composante longitudinale de l'accélération u', on puisse remplacer, sans erreur sensible, la composante longitudinale u de la vitesse par sa valeur moyenne U. La première des formules (3') du numéro 111 devient alors

$$u' = \frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dt} + \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2}\right),$$

d'où l'on déduirait

$$\frac{1}{g}\int_\omega u'\frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{g}\cdot\frac{dU}{dt} + \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right),$$

et, en vertu de cette relation et si l'on suppose d'ailleurs p_0 constante et égale à la pression atmosphérique, comme cela convient au cas d'un canal découvert que nous traitons ici, et que dans la formule (27' *ter*) on mette pour $\int_\chi Bu_0^2 d\chi$ son expression pour le régime uniforme $b'U^2\chi$, cette dernière formule devient

$$\sin I = b'\frac{\chi}{\omega}U^2 + \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1}{g}\frac{dU}{dt}.$$

C'est à cette formule que s'est arrêté M. de Saint-Venant, et il l'écrit de la manière suivante :

$$I = \frac{dz}{ds} = \frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi} + \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{1}{g}\frac{dU}{dt},$$

qui se déduit d'ailleurs immédiatement de l'équation (α_1) indiquée au numéro 107, où j'ai donné une première solution approximative basée sur la théorie de l'article 1er (nos 83 à 105). Il suffit, en effet, de remplacer dans cette équation (α_1') la vitesse V du filet auquel elle s'applique par la vitesse moyenne U du faisceau des filets dont se compose la section normale ω.

Il faut d'ailleurs toujours, à l'équation qui vient d'être indiquée, joindre l'équation de continuité, et l'on aura, en définitive, pour le mouvement non permanent considéré dans les limites d'approximation qui viennent d'être indiquées et que l'on peut admettre dans la pratique, le système d'équations qui suit :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{\chi}{\omega}\dfrac{F}{\pi} + \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{U^2}{2g}\right) + \dfrac{1}{g}\dfrac{dU}{dt}, \\ \dfrac{d\omega}{dt} + \dfrac{dq}{ds} = 0, \\ q = \omega U. \end{cases}$$

127. *Application à une espèce.* — Pour montrer l'usage que l'on peut faire de ce système d'équations, je ne puis mieux faire que d'emprunter mon exemple à un rapport que M. de Saint-Venant avait été appelé à faire sur un mémoire relatif aux marées présenté par M. Partiot à l'Institut. La section du canal étant, comme précédemment, un rectangle allongé, si l'on désigne toujours par h la hauteur d'eau dans la section dont l'abscisse sur l'axe du courant est s, et par i la pente par mètre du fond du canal, on aura

$$(1) \qquad d\left(\frac{z+h}{ds}\right)=i,$$

et l'équation de continuité deviendra ici, comme on l'a déjà vu plus haut,

$$(2) \qquad \frac{dh}{dt}+d\frac{(Uh)}{ds}=0.$$

En tirant de la première de ces équations

$$\frac{dz}{ds}=i-\frac{dh}{ds},$$

et substituant cette valeur dans la première des équations (1) du numéro 126, et en supposant d'ailleurs que U soit uniquement fonction de h, celle-ci peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$(3) \qquad \frac{dh}{ds}\left(g+U\frac{dU}{dh}\right)+\frac{dU}{dh}\frac{dh}{dt}-g\left(i-\frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi}\right)=0,$$

et l'équation (2) devient

$$(4) \qquad \frac{dh}{dt}+d\left(\frac{Uh}{dh}\right)\frac{dh}{ds}=0,$$

d'où l'on déduit, en éliminant t entre ces deux équations,

$$(5) \qquad \frac{dh}{ds}\left[g-h\left(\frac{dU}{dh}\right)^2\right]-g\left(i-\frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi}\right)=0;$$

et, si l'on admet que F se détermine par la relation

$$i=\frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi},$$

indiquée sous la forme $R_m i=B_1U^2$ au numéro 109 pour le mouvement uniforme[1], l'équation (5) devient

$$\frac{dh}{ds}\left[g-h\left(\frac{dU}{dh}\right)^2\right]=0,$$

[1] Dans ce mouvement on a $I=i$.

d'où l'on déduirait

$$\frac{dU}{dh} = \sqrt{g} \cdot h^{-\frac{1}{2}},$$

d'où, intégrant,

$$U = 2\sqrt{gh} + \text{const.},$$

et si h_0 désigne la valeur de h correspondant à $U = 0$, on aura

$$(6) \qquad U = 2\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0};$$

on déduira de là

$$d\frac{(Uh)}{dh} = U + \sqrt{gh} = 3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0},$$

et l'équation (4) devient dès lors

$$(7) \qquad \frac{dh}{dt} + \left(3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}\right)\frac{dh}{ds} = 0.$$

C'est une équation aux différences partielles, dont l'intégrale serait

$$(8) \qquad s = \left(3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}\right)t + \psi(h),$$

ψ étant une fonction arbitraire.

Cette équation donnerait la courbe du *profil en long instantané* du canal, c'est-à-dire la courbe qu'offrirait, au bout du temps t, l'intersection de la surface libre avec le cylindre vertical ayant pour base l'axe longitudinal du fond du canal.

La courbe que représente l'équation (8) se propage, en se déformant, comme si chacune des couches parallèles au fond du canal élevée à la hauteur h au-dessus de ce fond marchait avec une vitesse égale à $3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}$, que l'on peut appeler la *célérité de la propagation*.

M. de Saint-Venant a appliqué les résultats de son analyse aux intumescences que produit la marée à l'embouchure des fleuves dans l'Océan; il a admis pour cela la formule de Laplace :

$$(9) \qquad h = h_0 + H \sin\frac{2\pi t}{T},$$

dans laquelle h et h_0 ont la même signification que tout à l'heure, H dési-

gnant la hauteur de la marée à l'embouchure et T sa durée ($12^h 24'$), $\mathfrak{T}$ le temps compté en fonction de la valeur de T si l'on veut, au bout duquel, à partir de l'instant de la basse mer, la hauteur d'eau est devenue h à l'embouchure, ou bien le temps qui marque l'instant où chaque intumescence est partie de l'embouchure.

De l'équation (9) on tirerait

$$\mathfrak{T} = \frac{T}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{h - h_0}{H}}, \tag{10}$$

ce qui permet de remplacer l'équation (8) par la suivante :

$$s = (t - \mathfrak{T}) K, \tag{11}$$

en posant

$$K = 3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}. \tag{12}$$

K est la *célérité de la propagation* ou la longueur qu'acquerrait dans l'unité de temps l'intumescence produite par la marée dans la partie maritime de la rivière.

Il serait facile, au moyen de l'équation (9), de construire les valeurs de h qui correspondraient à des valeurs déterminées de $\mathfrak{T}$ et, en substituant ces valeurs dans la formule (12), on aurait les valeurs correspondantes de K; celles-ci, étant substituées ensuite dans l'équation (11), conduiraient aux valeurs correspondantes de s. On aurait ainsi autant de profils en long instantanés que de valeurs de $\mathfrak{T}$. Il faut remarquer d'ailleurs que, dans l'équation (11) du profil en long instantané, t est une constante, et qu'on aura, dès lors, autant de courbes qu'on lui donnera de valeurs arbitraires. Enfin, il y a lieu de faire observer que l'équation (8) cesserait d'être applicable si, t augmentant, deux valeurs de h venaient à correspondre à une même valeur de l'abscisse s supposée sensiblement horizontale. Il y aurait alors déferlement, et les couches supérieures, gagnant de vitesse, dépasseraient les couches inférieures en retombant sur elles.

Les résultats de l'analyse de M. de Saint-Venant sont, comme on le voit, très intéressants; mais, s'ils peuvent être utiles pour expliquer jusqu'à un certain point la propagation de l'onde de marée dans la partie maritime des rivières et même le phénomène du mascaret, il n'est pas possible, selon moi, d'admettre, avec cet éminent géomètre, que son analyse soit applicable aux crues des rivières. Il suffit de remarquer, pour s'en convaincre, qu'il n'est

arrivé à ses équations qu'en supposant un canal rectangulaire de largeur constante et très grande dont le mouvement primitif serait nul, puisqu'il a supposé que la valeur de U correspondant à $h = h_0$ était nulle, et que, dans tous les cas, cette vitesse n'était fonction que de la profondeur h, et il a admis aussi que les frottements développés lors du passage de l'onde restaient insensibles, etc.

Toutes ces hypothèses peuvent donner quelque chose d'approché, sur d'assez petites longueurs, pour la propagation des marées dans la partie maritime d'une rivière, où la pente est à peu près nulle et la largeur très grande et à peu près constante, mais elles ne peuvent plus conduire à rien en ce qui concerne le régime d'une rivière en crue, dans laquelle la pente et la section sont éminemment variables, et pour laquelle le type des étales est le mouvement permanent ou tout au plus le mouvement graduellement varié ou *quasi permanent*, et non le mouvement uniforme ou même l'état quasi stagnant. On ne saurait donc, à aucun point de vue, admettre que les formules qui viennent d'être données puissent trouver leur application dans la pratique pour l'étude du régime des rivières.

128. *Deux cas essentiels du régime des rivières.* — Il y a dans le régime variable d'une rivière deux cas essentiels à considérer. Dans le premier cas, un débit supplémentaire est introduit assez rapidement à l'origine du canal, comme cela arriverait, par exemple, par l'invasion dans la rivière de la crue brusque d'un de ses principaux affluents. Il résulte de cet afflux, quand il est subit, un fort tourbillonnement local et, par conséquent, des frottements considérables entre les couches liquides, ce qui vient en aide aux accroissements de pression, sensiblement constants de haut en bas, dus aux élévations de niveau, pour tendre plus vite à égaliser, dans une même section transversale du courant, toutes les vitesses horizontales des molécules, depuis le fond jusqu'à la surface libre du canal; les pressions qui se produisent tendent à soulever violemment cette surface et à y produire des intumescences qui se propagent ensuite, soit vers l'aval, soit même vers l'amont, suivant certaines lois. Et quand l'afflux, supposé toujours rapide, n'est pourtant pas assez brusque pour qu'il se produise, même au début, des tourbillonnements et frottements intérieurs pareils, il se forme encore des intumescences de la même nature, c'est-à-dire obéissant aux mêmes lois générales ou régies, soit par l'équation donnée ci-dessus des mouvements graduellement variés, quand les courbures n'en sont pas très notables, soit par d'autres plus complètes

(obtenues par M. Boussinesq aux numéros 137 et 180 *bis* de son livre) quand l'influence de ces courbures se fait au contraire sentir. Dans le second cas, au contraire, l'affluence des débits supplémentaires est progressive, et assez lente pour que le débit effectif à un moment donné ne diffère presque pas de ce qu'il serait, pour même hauteur d'eau, dans un régime permanent, comme il arrive tout au moins dans les parties inférieures des grands cours d'eau de faible pente, qui ne reçoivent guère que des crues parties de fort loin et, par conséquent, ayant eu le temps de s'étendre sur de grands espaces. Cet état peut donc être considéré comme un régime *quasi permanent*, car il est permanent à une première approximation.

Dans le premier cas de débits par affluence rapide, les effets de la pesanteur, c'est-à-dire des *dénivellations* du fluide, effets transmis par les pressions intérieures, prédominent sur ceux des frottements, tant intérieurs qu'extérieurs, au point que ceux-ci peuvent même souvent y être négligés pendant des périodes de temps modérées. Dans le second cas, au contraire, variation par affluence lente, les frottements tant intérieurs qu'extérieurs, sans devenir plus considérables (en valeur absolue) que dans le cas précédent, ont des effets aussi considérables que les pentes de la surface, beaucoup plus faibles que tout à l'heure, et ce sont les changements de pente d'un instant à l'autre, devenus fort lents, qui ont leur influence masquée par celle des frottements. On comprendra facilement que les lois du mouvement soient très différentes d'un de ces cas à l'autre.

Le régime général d'une rivière est entre ces deux types extrêmes, de chacun desquels il se rapproche plus ou moins, suivant que les crues ont lieu par affluence plus subite ou plus lente, et ces deux types sont, dès lors, ceux qu'il convient surtout d'étudier.

§ 4. — Régime variable par affluence lente.

129. *Mouvement quasi permanent.* — Le mouvement quasi permanent est le véritable type du mouvement par affluence lente. J'ai donné la loi de ce mouvement dans mon mémoire sur la digue de Pinay (note A), inséré au tome XXI des *Savants étrangers*, et si K représente toujours la célérité de la propagation, elle donne

$$K = \frac{dq}{d\omega}. \tag{13}$$

Ce serait la vitesse d'un courrier qui, partant d'un point déterminé, suivrait

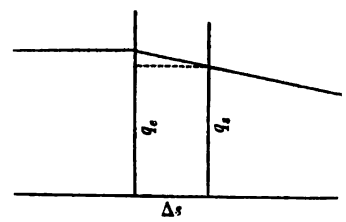
la crue dans sa propagation de manière à voir toujours à côté de lui le même débit qu'à son point de départ. K est donc la vitesse de propagation d'un même débit d'un poste d'observation de la rivière à un autre.

Si ω et ω' sont les aires de la section au même point de la rivière pour deux instants différents, U et U' les vitesses moyennes correspondantes, on pourrait, en pratique, remplacer la formule (13) par la suivante :

$$K = \frac{\omega U - \omega' U'}{\omega - \omega'}. \tag{14}$$

Voici comment on peut démontrer la formule (13) :

Fig. 35.



Supposons (fig. 35) deux sections transversales séparées par la longueur Δs correspondant à l'intervalle de temps Δt, et soient q_e et q_s les débits actuels dans ces sections. Comme Δt est supposé être précisément le temps qu'emploie le débit actuel q_e de la première section à se propager sur la seconde, le débit sur celle-ci, qui est actuellement q_s, croîtra sur place de $q_e - q_s$ pendant le temps Δt, en sorte qu'on a

$$q_e - q_s = \Delta q_s.$$

Donc le volume $(q_e - q_s)\,\Delta t$ entré pendant l'instant Δt dans le petit réservoir que comprennent les deux sections (fixes) peut s'écrire aussi $\Delta q_s \Delta t$; et, comme il égale évidemment le produit de Δs par l'accroissement $\Delta\omega$ de la seconde section, produit qui mesure le volume emmagasiné dans le réservoir, on aura

$$\Delta q_s \Delta t = \Delta\omega\, \Delta s,$$

où Δq_s et $\Delta\omega$ sont bien deux accroissements *simultanés* de débit et d'aire *produits sur la même section.* Par suite, la formule peut s'écrire aussi

$$\Delta\omega\, \Delta s = \Delta q\, \Delta t,$$

d'où

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta\omega},$$

et à la limite

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dq}{d\omega}.$$

M. Boussinesq a étudié aussi d'une manière spéciale le mouvement dont la formule (13) est la loi, et qu'il avait vue dans mon mémoire sur la digue de Pinay. Il regarde, à une première approximation, le mouvement comme permanent et suppose que la section ω est une fonction F du débit q, que l'on peut supposer connue[1], et de l'abscisse s qui fixe la position de cette section. On peut donc, sauf une erreur très petite due à cette hypothèse de la permanence du mouvement, poser

$$\omega = F(q, s),$$

et il ne reste à déterminer en fonction des deux variables indépendantes s et t que la seule inconnue q.

L'équation de continuité (M'), qui a été donnée plus haut, est

$$(M') \qquad \frac{d\omega}{dt} + \frac{dq}{ds} = 0;$$

en posant

$$\frac{dF(q, s)}{dq} = F'(q, s),$$

et, par suite, à très peu près,

$$\frac{d\omega}{dt} = F'(q, s)\frac{dq}{dt},$$

l'équation (M') devient

$$(15) \qquad F'(q, s)\frac{dq}{dt} + \frac{dq}{ds} = 0.$$

C'est une équation aux dérivées partielles de premier ordre, qui a pour intégrale

$$(16) \qquad t = \int_0^s F'(q, s)\, ds + \varphi(q),$$

φ étant une fonction arbitraire et l'intégration $\int_0^s F'(q, s)\, ds$ étant effectuée sans faire varier q. La vitesse de propagation K de chaque valeur de q s'obtiendrait, d'ailleurs, en faisant dans l'équation (16) croître t de dt et s d'une différentielle $ds = K\, dt$ choisie de manière que q ne varie pas. On aurait ainsi

$$dt - F'(q, s)\, ds = 0,$$

ou

$$dt - F'(q, s)\, K\, dt = 0,$$

[1] Par des jaugeages faits sur les lieux aux moments d'étale.

d'où l'on tirerait

$$(17) \qquad K = \frac{1}{F'(q, s)} = \frac{dq}{d\omega},$$

ce qui reproduit la formule (13) donnée plus haut.

Je ferai remarquer maintenant que cette *vitesse de propagation des débits*, la seule que l'on puisse constater par l'observation, diffère de la vitesse de propagation définie mathématiquement par M. Boussinesq, en considérant des plans transversaux marchant de manière à avoir constamment devant eux un égal volume d'intumescence. Si, dans ce nouvel ordre d'idées, on appelle q_0 le débit primitif supposé constant, c'est-à-dire le débit pour $t = -\infty$, et que $\omega_0 = F(q_0 s)$ soit la valeur correspondante de la section, le volume Q d'intumescence qui à l'époque t a traversé la section ω, l'abscisse s et de débit q, a pour expression

$$(18) \qquad Q = \int_{-\infty}^{t} (q - q_0)\, dt = \int_{s}^{\infty} (\omega - \omega_0)\, ds,$$

et sa vitesse de propagation V_p serait

$$(19) \qquad V_p = -\frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dQ}{ds}} = \frac{q - q_0}{\omega - \omega_0} = \frac{q - q_0}{F(q, s) - F(q_0, s)}.$$

Reprenons maintenant l'équation (17)

$$K = \frac{dq}{d\omega}.$$

Cette formule devient, en y remplaçant q par ωU,

$$(20) \qquad K = U + \omega \frac{dU}{d\omega}.$$

Cette dernière montre que *la célérité de la propagation est plus grande ou plus petite que la vitesse moyenne de débit suivant que la dérivée* $\frac{dU}{d\omega}$ *est positive ou négative, c'est-à-dire suivant que cette vitesse moyenne croît ou décroît sur la section à mesure que la hauteur d'eau augmente.* Or, en général, dans les rivières, U augmente en même temps que ω, si ce n'est pour celles où la largeur à fleur d'eau augmente subitement, ce qui n'arrive que dans les plaines submersibles; ce n'est que dans ce dernier cas que U peut varier en sens inverse de ω et que, par conséquent, la vitesse de propagation peut devenir plus petite que la

vitesse de débit. L'expérience confirme, du reste, entièrement ces déductions, et sur la Loire supérieure, que j'ai eu pendant treize ans à observer dans mon service d'ingénieur en chef, j'ai constaté maintes fois que, dans les gorges du Pertuiset et de Pinay, où la Loire est fortement encaissée et sans affluents notables, le maximum de crue observé aux échelles hydrométriques successives de la rivière s'y propageait de l'une à l'autre avec une vitesse très supérieure à la vitesse de débit, tandis qu'elle lui était notablement inférieure dans la plaine du Forez, comprise entre ces deux gorges, et dans laquelle la rivière pouvait déborder sur de très grands espaces dès que l'eau s'élevait à 3 mètres environ au-dessus du fond du thalweg. Je ne puis donc que signaler ici l'accord de la théorie et de l'expérience. Comparons maintenant la vitesse de propagation V_p donnée par la formule (19), et qui dans le travail de M. Boussinesq porte le numéro (415) (§ XXXIX, page 479 de l'*Essai sur les eaux courantes*), avec cette différence qu'il désigne par ω cette vitesse, que je désigne par V_p, et par σ la section que j'ai toujours, pour me conformer à l'usage dès longtemps établi, désignée par ω ;

$$V_p = \frac{q - q_0}{\omega - \omega_0}. \tag{19}$$

Si l'on veut introduire ici la vitesse de propagation des diverses valeurs du débit q, désignée plus haut par K, et en se rappelant que $K = \frac{1}{F'(q, s)}$, on peut écrire

$$\frac{1}{V_p} = \frac{\omega - \omega_0}{q - q_0} = \frac{F(q, s) - F(q_0, s)}{q - q_0} = \frac{1}{q - q_0}\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{K}.$$

Lorsque la crue est assez faible, c'est-à-dire lorsque $q - q_0$ est une quantité assez petite par rapport à q_0, l'équation qui vient d'être posée prend la forme

$$\frac{1}{V_p} = \frac{1}{K} = F'(q_0, s), \tag{21}$$

et montre que dans ce cas la vitesse de propagation V_p est égale à la célérité de propagation K des débits; mais lorsque la crue est forte, il n'en est plus de même, et les deux vitesses ne sont plus comparables.

Remarquons enfin que, si l'on considère le cas d'une section rectangulaire très large, de hauteur H, ce qui peut être admis pour les grandes rivières, à une première approximation, la formule (17) deviendrait

$$K = \frac{dq}{dH},$$

et si l'on admet la loi du régime uniforme, suffisamment exacte lorsqu'il s'agit d'un lit sensiblement prismatique sur une grande longueur, on a approximativement

$$q=\sqrt{\frac{iH^3}{B_1}},$$

ainsi qu'il est facile de s'en convaincre, d'où

$$K=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{Hi}{B_1}}. \tag{22}$$

Cette formule montre qu'à pente de fond égale la vitesse de propagation des débits varie proportionnellement à la racine carrée de la profondeur et en raison inverse de la racine carrée du coefficient de frottement extérieur B_1. Il suit de là que c'est dans les parties profondes que la propagation doit marcher le plus rapidement, et les différences de la vitesse de propagation qui peuvent ainsi naître dans une même section transversale font que les diverses phases de la crue s'y produisent en avance ou en retard les unes par rapport aux autres, et, dans les points où il y a avance, la surface libre se relève par rapport à ceux où il y a retard. D'où résulte que *le profil transversal de la surface libre doit être convexe dans la période croissante de la crue et concave dans la période décroissante*. Ici encore, les déductions théoriques sont en plein accord avec l'expérience, et il n'est pas un ingénieur de rivières qui n'ait constaté la convexité que prend la surface libre d'une rivière dans son profil transversal lorsqu'elle est en crue, et cette courbure peut même devenir très considérable dans les parties encaissées des rivières sujettes à de très fortes crues. C'est ce que j'ai constaté dans mon mémoire sur la digue de Pinay, pour les gorges du Pertuiset, où les crues s'élèvent jusqu'à 15 mètres et où la dénivellation de l'axe vers les bords dépasse 2 mètres dans la période aiguë d'une très grande crue.

On peut encore tirer du régime quasi permanent quelques propriétés qu'il est bon de faire connaître, et pour cela je reprends les équations du groupe (1) du numéro 126. En substituant, dans la première, au terme $\frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\pi}$ son équivalent $\frac{\chi}{\omega}B_1U^2$, elle s'écrit

$$\frac{dz}{ds}=\frac{\chi}{\omega}B_1U^2+\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)+\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}, \tag{23}$$

et la seconde, en y substituant pour q sa valeur ωU, peut s'écrire

$$\frac{d\omega}{dt}+\frac{Ud\omega}{ds}+\omega\frac{dU}{ds}=0; \tag{24}$$

de cette équation on tire

$$\frac{dU}{ds} = -\frac{\frac{d\omega}{dt} + \frac{U d\omega}{ds}}{\omega}.$$

On a, d'un autre côté, et en vertu de la troisième équation du groupe (1) du numéro 126,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{\omega}\right) = \frac{\omega \frac{dq}{dt} - q \frac{d\omega}{dt}}{\omega^2}.$$

En substituant ces valeurs de $\frac{dU}{ds}$ et $\frac{dU}{dt}$, et en y faisant d'ailleurs $U = \frac{q}{\omega}$, l'équation (23) devient

$$(25) \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{g\omega}\left[\frac{dq}{dt} - \frac{2q}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\right] - \frac{q^2}{g\omega^3}\frac{d\omega}{ds} + \frac{\chi}{\omega} B_1 \frac{q^2}{\omega^2}.$$

Cette équation est, aux notations près, celle que M. Kleitz a donnée dans son mémoire inséré aux *Annales des ponts et chaussées*, année 1877, comme pouvant s'appliquer d'une manière générale au régime des rivières. M. Kleitz est arrivé aussi à l'expression suivante de la vitesse de propagation des débits :

$$K = \frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}}.$$

Il trouve cette expression au moyen de l'équation de continuité (M')

$$(M') \qquad \frac{d\omega}{dt} + \frac{dq}{ds} = 0$$

et de la relation différentielle

$$(26) \qquad \frac{dq}{ds} ds + \frac{dq}{dt} dt = 0,$$

qui suppose nulle la différentielle de q considéré comme fonction de s et de t. De la seconde de ces équations on tirerait, en effet,

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{dq}{ds}},$$

d'où, puisque la première donnerait

$$\frac{dq}{ds} = -\frac{d\omega}{dt},$$

on déduit

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}},$$

ou

$$(27)\qquad K=\frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}}.$$

C'est là l'expression de la vitesse avec laquelle se propagent toutes les valeurs particulières du débit q, expression qui n'est qu'une généralisation de l'expression (13) propre au mouvement quasi permanent, où q n'est pas directement fonction de t, mais seulement de s et ω, en sorte que l'on y a

$$\frac{dq}{dt}=\frac{dq}{d\omega}\frac{d\omega}{dt},$$

et, par suite, la formule (27) se réduit à

$$K=\frac{dq}{d\omega},$$

c'est-à-dire la formule (13).

L'expression (27) se met d'ailleurs aussi sous la forme suivante :

$$(28)\qquad K=U+u\frac{\frac{dU}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}}.$$

Il est facile de remarquer l'analogie qu'il y a entre les expressions (27) et (28) et les expressions (13) et (20) que j'ai données au numéro 129 pour le mouvement quasi permanent, qui s'en déduisent en remplaçant $\frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}}$ par $\frac{dq}{d\omega}$, ce qui suppose, comme je l'ai dit tout à l'heure, que q est seulement une fonction connue de ω et de s, ou ne dépend de t que par l'intermédiaire de ω, en sorte que l'on a

$$\frac{dq}{dt}=\frac{dq}{d\omega}\frac{d\omega}{dt},$$

et, par suite, d'après (27),

$$K=\frac{dq}{d\omega}.$$

Les relations différentielles auxquelles est arrivé M. Kleitz, et qu'il a employées à ébaucher une théorie des crues, ne paraissent donc pas suffisantes, et il faudrait arriver à les intégrer pour en tirer des résultats plus positifs.

On remarquera maintenant que, si l'on réduit, pour plus de simplicité, à 1 les nombres α et $1+\eta$ ou $\int \frac{u^3}{U^3}\frac{d\omega}{\omega}$ et $\int \frac{u^2}{U^2}\frac{d\omega}{\omega}$, l'équation du mouvement permanent (ε_0') du numéro 122 devient, puisque dans ce cas $\alpha' = \int_\omega \frac{2u^3}{U^3}\frac{d\omega}{\omega} - \frac{u^2}{U^2}\frac{d\omega}{\omega} = 1$,

$$(29) \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{\chi}{\omega} B_1 U^2 + \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right),$$

et, puisque l'on a pour le mouvement permanent,

$$\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

l'équation de continuité (M') devient

$$d\left(\frac{\omega U}{ds}\right) = 0,$$

ou

$$\omega \frac{dU}{ds} + U\frac{d\omega}{ds} = 0;$$

d'où l'on tirerait

$$\frac{dU}{ds} = -\frac{U}{\omega}\frac{d\omega}{ds}.$$

En substituant cette valeur dans (29) et pour U sa valeur $\frac{q}{\omega}$, celle-ci devient :

$$(30) \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{\chi}{\omega} B_1 \frac{q^2}{\omega^2} - \frac{q^2}{g\omega^2}\frac{d\omega}{ds}.$$

Si l'on compare cette équation à l'équation (25) du mouvement non permanent, on voit qu'elle n'en diffère que par le terme $\frac{1}{g\omega}\left(\frac{dq}{dt} - \frac{2q}{u}\frac{d\omega}{dt}\right)$, qui s'ajoute à son second membre.

M. Boussinesq a démontré mathématiquement, dans les paragraphes XXXVI, XXXVIII et XXXIX de son *Essai sur les eaux courantes*, que les ondes et les crues vont en s'aplatissant dans leur propagation de l'amont à l'aval, ce qui tient tant à l'inégalité de vitesse des filets fluides qu'au frottement du lit et à sa pente. M. Kleitz a admis le fait comme établi par l'expérience, ce qui est parfaitement exact, et j'ai eu occasion de le vérifier plus d'une fois sur la Loire. En s'appuyant sur ce fait et sur l'équation de continuité, on peut établir que *le débit maximum, en chaque endroit, se produit un certain temps avant le maximum de la section.*

L'équation de continuité

$$\frac{d\omega}{dt}+\frac{dq}{ds}=0$$

donnant $\frac{dq}{ds}=0$ au moment du maximum de la crue, où l'on a $\frac{d\omega}{dt}=0$, et la variation du débit correspondante en suivant le flot maximum, $\frac{dq}{dt}dt=\frac{dq}{ds}ds$ étant négative d'après le fait, établi tout à l'heure, de l'aplatissement progressif de la crue, on a pour ce moment

$$\frac{d\omega}{dt}=0, \qquad \frac{dq}{dt}<0.$$

Donc q est déjà en train de diminuer à l'endroit considéré, au moment où l'on a $\frac{d\omega}{dt}=0$, c'est-à-dire au moment où la section ou bien la hauteur de crue est à son maximum.

L'endroit où, à un moment donné, a lieu le maximum de débit, est nécessairement un peu en avant, par rapport au sens de la propagation, de l'endroit où a lieu, à ce même moment, le maximum de section; car, à l'endroit où l'on a $\frac{d\omega}{ds}=0$, la variation $\frac{d\omega}{ds}ds+\frac{d\omega}{dt}dt$ de ω se réduit à $\frac{d\omega}{dt}dt$, et elle est négative dès qu'on admet ce fait, démontré d'ailleurs, ainsi que je l'ai dit tout à l'heure, que le maximum de la crue va en s'atténuant d'amont en aval. Mais, puisque $\frac{d\omega}{dt}dt$ ou $\frac{d\omega}{dt}$ est une quantité négative, l'équation de continuité donne $\frac{dq}{ds}>0$; on a donc $\frac{dq}{ds}>0$ à l'endroit où $\frac{d\omega}{ds}=0$, ce qui démontre que le maximum du débit n'est pas à l'endroit où a lieu le maximum actuel de section, mais bien à une certaine distance en avant.

M. Boussinesq a démontré aussi, au numéro 192 de son *Essai sur les eaux courantes*, que la hauteur d'eau est, à débit égal, plus petite quand le courant est en crue que lorsqu'il est en étale, c'est-à-dire au moment où l'on a $\frac{dq}{dt}=0$, et plus grande lorsque la crue est en décroissance, d'où résulte, à l'inverse, que, *pour une même hauteur d'eau, le débit et la vitesse moyenne sont plus forts dans la période ascendante que dans la période descendante de la crue.* C'est ce que l'expérience confirme encore[1].

[1] Mémoire de M. Baumgarten sur la Garonne (*Annales des ponts et chaussées* de 1848). Expériences des officiers américains sur le Mississipi; mémoire de M. Graeff sur la digue de Pinay (tome XXI des *Savants étrangers*).

Il me reste à faire remarquer maintenant qu'en vertu de la relation (27), l'équation (25) peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$(25\,bis)\qquad \frac{dz}{ds}=\frac{1}{g\omega}\frac{d\omega}{dt}\left(K-\frac{2q}{\omega}\right)-\frac{q^2}{g\omega^3}\frac{d\omega}{ds}+\frac{\chi}{\omega}B_1\frac{\omega^2}{q^2},$$

et, si l'on admet pour K sa valeur (17), qui convient au mouvement quasi permanent, l'équation de ce mouvement deviendra

$$\frac{dz}{ds}=\frac{1}{g\omega}\frac{d\omega}{dt}\left(\frac{dq}{d\omega}-\frac{2q}{\omega}\right)-\frac{q^2}{g\omega^3}\frac{d\omega}{ds}+\frac{\chi}{\omega}B_1\frac{q^2}{\omega^2},$$

et, en vertu de l'équation de continuité

$$\frac{d\omega}{dt}+\frac{dq}{ds}=0,$$

elle devient

$$(31)\qquad \frac{dz}{ds}=\frac{\chi}{\omega}B_1\frac{q^2}{\omega^2}-\frac{1}{g\omega}\frac{dq}{ds}\left(\frac{dq}{d\omega}=\frac{2q}{\omega}\right)-\frac{q^2}{g\omega^3}\frac{d\omega}{ds},$$

équation qui ne contient plus t. Il ne faut pas oublier que, dans le mouvement quasi permanent, on a supposé que ω était une fonction connue de q et de s, de sorte que l'équation ci-dessus (25 *bis*) deviendra une équation aux dérivées partielles premières entre s, t, q et $\frac{dq}{dt}\,\frac{dq}{ds}$, qu'il resterait à intégrer, et c'est ce qu'a fait M. Boussinesq au numéro 192 du traité des eaux courantes, pour en tirer notamment la loi de deuxième approximation qui vient d'être énoncée plus haut.

Je crois en avoir assez dit sur le régime quasi permanent, qui est le type du mouvement non permanent par affluence lente, et il me reste maintenant à traiter le cas du mouvement non permanent par affluence rapide.

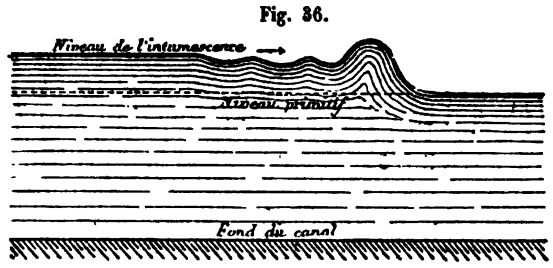
§ 5. — Régime variable par affluence rapide.

130. *Considérations générales.* — J'ai déjà dit au numéro 128 comment un débit supplémentaire introduit brusquement à l'extrémité d'amont d'un canal y produisait une intumescence, qui se propageait ensuite soit vers l'aval soit même aussi vers l'amont suivant certaines lois, et ce sont ces lois qu'il s'agit maintenant de déterminer.

M. Bazin a fait sur la propagation des ondes des expériences que j'aurai occasion de citer dans la partie pratique de mon livre, mais les lois qu'il en a déduites ne se vérifient qu'autant que le rapport de la hauteur de l'intu-

mescence à la profondeur primitive de l'eau est une quantité assez petite. Lorsque la profondeur du canal est très grande par rapport à la hauteur de l'intumescence, l'onde qui marche en tête de cette intumescence est toujours plus haute que la lame qui la suit, ainsi que l'indique la figure 36.

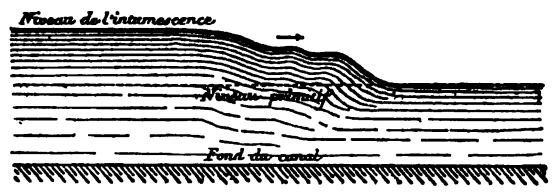
Fig. 36.



Lorsqu'au contraire, la hauteur de l'intumescence au-dessus du niveau primitif se rapproche de la hauteur d'eau dans le canal, l'onde de tête ne domine plus la lame qui la précède, et elle déferle sans cesse, comme l'indique la figure 37.

Cela tient peut-être à l'influence des frottements à la paroi, qui, masquée tant que la valeur du rapport de la hauteur de l'onde à la profondeur de l'eau était très petite par l'influence prédominante de la pesanteur ou de la pente de surface, commence à se manifester avec plus d'énergie dès que ce rapport s'approche de l'unité et, à plus forte raison, lorsqu'il devient plus petit que 1.

Fig. 37.



Si donc on veut faire une étude théorique de la question, il faut se placer dans les conditions où le phénomène est complet, c'est-à-dire dans l'hypothèse d'une valeur assez petite du rapport entre la hauteur maxima de l'onde et la profondeur de l'eau.

Si, dans un canal de longueur indéfinie et à section rectangulaire constante, le régime uniforme est établi avant la propagation de l'onde, les frottements entre les filets fluides et entre ceux-ci et la paroi font, d'après la condition même d'uniformité du mouvement, équilibre à la composante du poids de ces filets, suivant l'axe du canal ou suivant toute ligne parallèle au profil longitudinal du fond. On pourra, dès lors, faire abstraction de cette composante et réduire l'action de la gravité g à sa composante normale au fond. La pente du fond étant, d'ailleurs, toujours très faible, il s'ensuit que cette composante ne diffère pas sensiblement de g, et les choses se passent, dès lors, comme si l'on avait affaire à un canal dont le fond serait horizontal et dans lequel l'eau serait à l'état d'équilibre statique. Il en est à peu près ainsi,

quoique les vitesses des filets diffèrent peu entre elles; car, si l'on adopte un système de coordonnées animé de la moyenne de ces vitesses, le liquide rapporté à ces axes peut être considéré comme à peu près immobile, ce qui résulte, d'ailleurs, aussi des expériences de M. Bazin. On peut donc, pour l'étude théorique de la question qui nous occupe, se borner au cas où l'eau est en repos dans le canal [1].

Le caractère qui distingue essentiellement le mouvement à étudier de celui des autres mouvements ondulatoires des liquides, qui tiennent à des causes superficielles, consiste en ce que les vitesses horizontales des molécules fluides y sont sensiblement égales dans toute l'étendue d'une section normale du canal. L'expérience prouve d'ailleurs que, l'onde une fois formée, les frottements n'ont plus qu'une très faible influence, et la longévité si connue de *l'onde solitaire* le prouve d'une manière évidente. Cela permet d'admettre, à partir du moment où l'onde occasionnée par l'introduction brusque d'un débit supplémentaire à l'origine du canal est formée, l'hypothèse de la fluidité parfaite de laquelle résulte immédiatement l'égalité de pression en tous sens, comme on l'a vu au numéro 69 (1re section, chap. Ier). Lorsque les actions tangentielles ont des valeurs relativement faibles et négligeables, comme cela arriverait ici, leur influence n'est, d'ailleurs, que masquée, pour ainsi dire; car c'est l'effet de ces actions tangentielles qui produit la continuité du mouvement, en empêchant les molécules contiguës d'avoir des vitesses assez différentes entre elles pour produire la disjonction. Il faut donc toujours se rappeler, tout en négligeant, à une première approximation, les frottements intérieurs, que leur action ne saurait être entièrement nulle, et, sans la continuité qu'elle assure, les questions d'hydrodynamique ne seraient plus que des problèmes indéterminés.

Les considérations que je viens d'exposer résultent des belles études de M. Boussinesq sur la propagation des ondes. La première, qu'il présenta en 1869, est son savant mémoire intitulé: *Théorie des ondes liquides périodiques*, que l'on trouve au tome XX du *Recueil des Savants étrangers*. La seconde, qui traite spécialement la question de la propagation des ondes causée par affluence rapide des débits supplémentaires dans un canal, a été présentée à l'Académie des sciences en 1871 et insérée au *Journal de Liouville* en 1872.

[1] Toutefois, aux paragraphes XXVII, XXXVI et XXXVII de son livre, M. Boussinesq a tenu compte des inégalités de vitesse des divers filets fluides ainsi que des effets particuliers dus à la pente du fond et à son frottement, et il a rendu compte avec une grande précision des particularités qui distinguent les ondes propagées le long d'une eau courante de celles que transmet une eau primitivement en repos.

Ce mémoire est intitulé : *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond.* Les intumescences qui se propagent dans ces conditions, et qu'on peut appeler ondes de translation, diffèrent essentiellement des ondes périodiques.

M. Boussinesq a repris la question de la propagation des ondes dans son *Essai sur les eaux courantes*, en la rattachant aux méthodes d'analyse suivies dans cet ouvrage (§ XXVII à XXXVIII inclusivement); mais, pour la question spéciale des ondes de translation que nous avons à étudier ici, c'est son mémoire de 1871, inséré au *Journal de Liouville*, qui m'a paru le plus intéressant, et c'est dans ce travail que j'ai puisé ce qui va suivre. J'ai conservé, d'ailleurs, à ses équations les numéros qu'elles portent dans le mémoire, en affectant chaque numéro de deux accents, et je désignerai par V_p la vitesse de propagation qu'il désigne par ω, afin de ne rien changer aux notations que j'ai précédemment adoptées.

131. *Mise en équation du problème.* — Désignons par x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point de la masse fluide au bout du temps t et par p l'intensité de la pression ou la pression par unité de surface en ce point. Les z sont, d'ailleurs, comptés de bas en haut à partir du plan horizontal constituant le plafond du canal et qui est pris pour plan des x, y; u, v, w sont les composantes de la vitesse du point suivant les trois axes, composantes qui sont des fonctions de x, y, z, t; X, Y, Z sont les composantes de l'action extérieure rapportée à l'unité de masse.

Si l'on se rappelle ce qui a été dit plus haut que, l'onde une fois formée, on pouvait admettre l'hypothèse de la mobilité absolue, on pourra appliquer immédiatement à la question qui nous occupe l'équation (F') du numéro 86 *bis*, en y changeant seulement le signe de z, qui est maintenant compté de bas en haut, et en y faisant $X=0$, $Y=0$, $Z=g$, ce qui donne

$$\frac{dp}{\rho}=-g\,dz-d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)-\frac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right];$$

la fonction φ étant telle que l'on ait

$$u=\frac{d\varphi}{dx},\qquad v=\frac{d\varphi}{dy},\qquad w=\frac{d\varphi}{dz},$$

l'équation qui précède devient, par l'intégration,

$$(11'')\qquad \frac{p}{\rho}=-gz-\frac{d\varphi}{dt}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]+\text{fonction arbitraire de } t,$$

et l'équation de continuité

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0$$

devient

$$(12'')\qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0.$$

Le plafond du canal est horizontal par hypothèse et les composantes horizontales u et v doivent, d'après ce qui a été dit plus haut de la nature du mouvement, avoir des valeurs sensiblement égales, à un instant quelconque, pour toutes les molécules situées sur une même verticale. Si φ_0 est la valeur de la fonction φ aux divers points du plan des xy du plafond du canal, et que l'on remarque que w ou $\frac{d\varphi}{dz}$ doit être nulle pour $z=0$, d'après la condition spéciale à la paroi, on aura pour φ la valeur suivante :

$$\varphi=\varphi_0+\int_0^z dz\int_0^z \frac{d^2\varphi}{dz^2}\,dz,$$

qui, eu égard à la relation (12''), devient

$$(13'')\qquad \varphi=\varphi_0-\int_0^z dz\int_0^z\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)dz.$$

Si l'on se rappelle que, d'après la définition du mouvement, u, v ou $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$ diffèrent très peu de leurs valeurs $\frac{d\varphi_0}{dx}$, $\frac{d\varphi_0}{dy}$ au fond, l'équation (13'') pourra s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\varphi=\varphi_0-\frac{z^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2\varphi_0}{dx^2}+\frac{d^2\varphi_0}{dy^2}\right),$$

et, en substituant cette expression dans le second membre de la formule (13''), on pourra ainsi, par approximations successives, calculer φ en série convergente, et, si l'on pose d'ailleurs d'une manière symbolique

$$\Delta_2=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2},$$

on aura finalement l'expression

$$(14'')\quad \varphi=\varphi_0-\frac{z^2}{1\cdot 2}\Delta_2\varphi_0+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta_2\Delta_2\varphi_0-\frac{z^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\Delta_2\Delta_2\Delta_2\varphi_0+\cdots$$

Pour arriver à cette formule, on a supposé que les valeurs u, v des composantes horizontales de la vitesse ne différaient pas de celles qu'elles ont au fond

du canal. Mais M. Boussinesq a donné de cette formule une démonstration complète indépendamment de cette hypothèse restrictive (*Journal de Liouville*, 2e série, tome XVIII, 1873), ce qui permet de l'appliquer non seulement aux mouvements des ondes de translation que nous avons à étudier ici, mais encore à tous les mouvements ondulatoires des liquides.

Si l'on désigne maintenant par p_0 la pression atmosphérique supposée constante, par H la profondeur du canal dans sa partie non encore agitée, par $H+h$ la hauteur variable, fonction de x, y, t dans les parties actuellement agitées du fluide, h étant une quantité assez petite, condition nécessaire, comme on l'a vu au numéro 130, pour que le phénomène de la propagation de l'onde soit complet, par P la partie de la pression p qui ne varie pas suivant la loi hydrostatique, on aura

$$p = p_0 + \rho g (H + h - z) + P.$$

On peut annuler la fonction φ aux points très éloignés où le mouvement ne doit pas arriver de longtemps, à condition de ne changer nulle part les dérivées en x, y, z de cette fonction, et la formule (11″) devient dès lors

$$\frac{P}{\rho} = -gh - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] + \text{fonction arbitraire de } t.$$

Pour déterminer la fonction arbitraire, on remarquera qu'aux points très éloignés où l'on a $\varphi = 0$, les quatre dérivées de φ en x, y, z, t et les quantités P et h s'annulent à la fois; la fonction arbitraire est nulle dès lors, et l'on en déduit immédiatement

$$(16'') \qquad P = -\rho\left[gh + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]\right].$$

A la surface libre on a, d'ailleurs, $P = 0$, puisque P représente la partie de la pression non soumise à la loi hydrostatique. Il faut, de plus, exprimer qu'une molécule ne peut, dans son mouvement, quitter cette surface. Si donc, dans l'équation de la surface libre on fait croître t de dt, y de udt et y de vdt, l'ordonnée $H+h$ de la molécule, aux points qu'elle occupera ainsi successivement, devra croître de wdt, et les conditions relatives à la surface libre sont, dès lors, les suivantes :

$$(17'') \qquad \begin{cases} gh + \dfrac{d\varphi}{dt} + \dfrac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) = 0, \\ w = \dfrac{dh}{dt} + \dfrac{dh}{dx}u + \dfrac{dh}{dy}v. \end{cases}$$

Si l'on se rappelle que notre canal est à fond horizontal, que sa section normale est un rectangle très allongé et qu'elle est perpendiculaire au plan des xz, on verra que l'on n'a à considérer que des vitesses parallèles à ce plan, indépendantes de y et par conséquent des formes cylindriques de la surface libre.

La fonction φ_0 et la partie variable h de la profondeur ne dépendront plus, dès lors, que de x et t, et, si l'on admet que la propagation du mouvement se fasse vers les x positifs, u_0 et φ seront nuls pour $x=\infty$, et l'on aura

$$\varphi_0 = -\int_x^\infty u_0 dx,$$

ce qui transforme la formule (14″) dans la suivante :

$$(18'') \qquad \varphi = -\int_x^\infty u_0 dx - \frac{z^2}{1.2}\frac{du_0}{dx} + \frac{z^4}{1.2.3.4}\frac{d^3u_0}{dx^3} - \cdots\cdots$$

et les équations (17″) dans les suivantes, en se rappelant, d'ailleurs, que u et w sont les dérivées de φ en x et en z,

$$(19'') \left\{ \begin{aligned} & gh - \int_x^\infty \frac{du_0}{dt} dx - \frac{(H+h)^2}{1.2}\frac{d^2u_0}{dx\,dt} + \cdots + \frac{1}{2}\left\{\left[u_0 - \frac{(H+h)^2}{1.2}\frac{d^2u_0}{dx^2} + \cdots\right]^2 \right. \\ & \qquad\qquad \left. + \left[-\frac{H+h}{1}\frac{du_0}{dx} + \cdots\right]^2\right\} = 0, \\ & -\frac{H+h}{1}\frac{du_0}{dx} + \frac{(H+h)^3}{1.2.3}\frac{d^3u_0}{dx^3} - \cdots = \frac{dh}{dt} + \frac{dh}{dx}\left(u_0 - \frac{(H+h)^2}{1.2}\frac{d^2u_0}{dx^2} + \cdots\right). \end{aligned} \right.$$

Ces deux relations en h et en u_0 régissent les variations de ces deux fonctions en x et t et, si ces fonctions pouvaient être déterminées, la question serait résolue; car les équations (18″) et (16″) donneraient ensuite les composantes u et w de la vitesse et la partie P non hydrostatique de la pression dans tous les points de la masse fluide, dont nous avons admis plus haut la mobilité parfaite comme hypothèse comportée par la nature même du mouvement de l'onde, ce mouvement étant une fois régulièrement établi.

Si h est très petit, il en sera de même de la vitesse u_0 au fond, et ses dérivées successives seront de plus en plus petites, ce qui rend très rapidement convergente la série (18″). On pourra, dès lors, négliger, dans la première des équations (19″), tous les termes qui sont très petits par rapport à u_0 et, dans la seconde, tous ceux qui seront très petits par rapport à $\frac{du_0}{dx}$, et ces deux équations deviennent ainsi, à cette approximation,

$$(20'') \qquad \left\{ \begin{aligned} & \int_x^\infty \frac{du_0}{dt} dx = gh, \\ & \frac{dh}{dt} = -H\frac{du_0}{dx}. \end{aligned} \right.$$

En différentiant la première de ces équations deux fois en x, en ajoutant le résultat multiplié par H à la seconde différentiée deux fois en t, M. Boussinesq arrive à la relation

$$(21'')\qquad \frac{d^2h}{dt^2}=gH\frac{d^2h}{dx^2}.$$

C'est l'équation différentielle à laquelle était arrivé Lagrange pour le mouvement des ondes dans un canal peu profond.

Il résulte de là cette conséquence très remarquable, c'est qu'*à une première approximation la vitesse de propagation des ondes est régie par la loi de Lagrange*, qui est, comme on le sait,

$$V_p=\sqrt{gH}.$$

Si l'on considère, d'ailleurs, ce qui se passe vers les x positifs, on remarquera que u_0 et h sont nuls pour $t=0$, et l'intégrale de l'équation (21'') serait, dès lors,

$$(24'')\qquad \left\{\begin{array}{l} h=f\left(x-t\sqrt{2gH}\right),\\ f \text{ étant une fonction arbitraire,}\\ \text{et } u_0 \text{ aurait pour valeur}\\ \qquad u_0=h\sqrt{\frac{g}{H}}.\end{array}\right.$$

Si l'on veut de cette première approximation passer à une seconde, il faut, dans la première des équations (19''), conserver le troisième terme et le terme u_0^2 de la parenthèse qui termine le premier membre, et, dans la seconde de ces équations, la partie $-h\frac{du_0}{dx}$ du premier terme, plus le second terme, et dans le second membre de cette même équation le second terme. Il faut remarquer de plus que ces termes, étant très petits, pourront être évalués en y substituant pour h et u_0 leurs valeurs données par le système (24'') qui résultent de la première approximation; on arrive ainsi aux équations

$$(25'')\qquad \left\{\begin{array}{l} \int_x^\infty \frac{du_0}{dt}\,dx=gh+\frac{g}{2}\left[\frac{h^2}{H}+H^2\frac{d^2h}{dx^2}\right],\\ \frac{dh}{dt}=-H\frac{du_0}{dx}-\sqrt{gH}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{h^2}{H}-\frac{H^2}{6}\frac{d^2h}{dx^2}\right].\end{array}\right.$$

M. Boussinesq différentie la seconde de ces équations, et fait observer que la valeur des termes entre parenthèses, étant très petite, peut être regardée

comme une simple fonction de $x - t\sqrt{gH}$ et a sa dérivée en t égale au produit par $-\sqrt{gH}$ de sa dérivée en x; il ajoute au résultat de cette opération la première des équations (25″), après l'avoir différentiée deux fois en x et multipliée par H, et il arrive ainsi à l'équation suivante

$$(26'') \qquad \frac{d^2h}{dt^2} = gH\frac{d^2H}{dx^2} + gH\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3}\frac{d^2H}{dx^2}\right],$$

qui devient la base de son analyse.

132. *Vitesse de propagation.* — La hauteur variable h que comprend l'intumescence, où l'excès en chaque point de la profondeur actuelle sur la profondeur primitive, est ce que M. Boussinesq appelle *la hauteur de l'intumescence*, et il appelle *volume de l'intumescence* la quantité totale de liquide qui se trouvera dans le canal sur une largeur égale à l'unité en plus de celle qui y serait contenue si le niveau primitif n'avait pas changé. La partie σ de ce volume comprise au bout du temps t depuis la tête de l'onde jusqu'à la section normale dont l'abscisse est x, soit l'aire de la section longitudinale comprise entre la surface libre actuelle et la surface libre primitive entre ces deux points, aura pour expression

$$(27'') \qquad \sigma = \int_x^\infty h\,dx.$$

Si l'intumescence est limitée à son arrière, c'est-à-dire si elle est terminée du côté des x négatifs par une abscisse particulière, on peut regarder comme insensibles les valeurs de h au delà de cette abscisse, et alors on aura pour σ une valeur finie Q. Si l'intumescence est illimitée et que l'on considère la partie comprise entre sa tête et une abscisse x_0 très éloignée, si l'on suppose, d'ailleurs, et c'est là l'hypothèse fondamentale au moyen de laquelle M. Boussinesq est parvenu à expliquer bien des parties obscures jusqu'alors du phénomène, que cette abscisse x_0 soit variable d'un moment à l'autre d'après la condition que le volume considéré reste constant, et que l'on désigne par Q ce volume, on aura

$$(28'') \qquad Q = \int_{x_0}^\infty h\,dx,$$

formule qui serait applicable aussi à l'onde illimitée en y faisant $x_0 = -\infty$. Chaque élément $h\,dx$ représente une partie de l'intumescence comprise entre deux plans normaux à l'axe des x et distants l'un de l'autre de la quantité dx. On peut supposer que ces plans marchent du côté des x positifs de manière

que chacun d'eux ait toujours devant lui une partie constante d'intumescence, ce qui revient à admettre que l'élément hdx ou $d\sigma$ d'intumescence reste constant pour la succession de tous les instants du mouvement, et la vitesse de propagation de chacun des plans considérés ou de la section fluide qu'il détermine sera celle de la partie adjacente d'intumescence.

La vitesse de propagation qui s'introduit nécessairement dans tout mouvement non permanent a maintenant sa définition mathématique : *cette vitesse est celle des plans transversaux normaux à l'axe du canal qui marchent de manière à avoir constamment devant eux un volume constant de crue ou d'intumescence.* J'avais déjà fait pressentir au numéro 129 cette définition, établie maintenant dans toute sa rigueur. Elle permet de déterminer la vitesse de propagation de chaque partie d'intumescence, tandis que les expressions de la célérité de propagation déterminée au numéro 129, à l'occasion du mouvement quasi permanent, ne donnent que les vitesses avec lesquelles se propagent les débits d'un point à un autre du canal. On voit qu'il ne faudrait pas confondre ces deux vitesses, qui, si elles peuvent donner le même résultat dans le cas particulier cité au numéro 129, peuvent, au contraire, différer notablement dans tous les autres.

Désignons par V_p la vitesse de propagation définie comme il vient d'être dit et dont l'expression s'obtiendra en écrivant que le second membre de l'équation (27″) ne varie pas lorsqu'on fait croître t de dt et x de $V_p\,dt$, ce qui conduit à l'équation

$$-hV_p+\int_x^\infty \frac{dh}{dt}\,dx=0,$$

et, en différentiant cette équation en x, on arrive à la suivante :

$$(29'')\qquad \frac{dh}{dt}+\frac{d(hV_p)}{dx}=0,$$

dont l'analogie avec l'équation de continuité, dont nous nous sommes si souvent servi dans ce qui précède, est frappante. Cette équation est, en effet, pour une section rectangulaire très large de hauteur h,

$$\frac{dh}{dt}+d\frac{(hU)}{ds}=0.$$

Elle exprime la conservation des volumes de chaque élément du débit, et l'équation (29″), la conservation du volume de chaque élément de l'intumescence.

La valeur de $\frac{dh}{dt}$ tirée de l'équation (29″) et mise dans l'équation fondamentale (26″) de la fin du numéro 131 rend celle-ci intégrable une fois par rapport à x. Elle devient, en remarquant d'ailleurs que h et ses dérivées deviennent nulles pour $x=\infty$,

$$(30'')\qquad \frac{d.hV_p}{dt}+gH\frac{dh}{dx}+gH\frac{d}{dx}\left[\frac{3h^2}{2H}+\frac{H^3}{3}\frac{d^2h}{dx^2}\right]=0.$$

M. Boussinesq arrive, par des procédés d'analyse ingénieux, que je n'ai pas à reproduire ici et que trouveront dans son mémoire les personnes qui voudraient s'en rendre compte, à réduire cette expression à la suivante :

$$(34'')\qquad \frac{V_p}{\sqrt{gH}}=1+\frac{3h}{4H}+\frac{H^2}{6H}\frac{d^2h}{dx^2},$$

d'où, en élevant au carré,

$$(35'')\qquad V^2_p=g\left[H+\frac{3}{2}h+\frac{H^3}{3h}\frac{d^2h}{dx^2}\right].$$

Cette équation donne V_p en h et $\frac{d^2h}{dx^2}$, et l'équation (29″) conduirait, sous forme finie, aux variations de h qui se produisent pendant un temps assez court. M. Boussinesq, par diverses transformations sur cette équation, arrive à la relation

$$(40''\,bis)\qquad \frac{dh}{dt}=\frac{\sqrt{gH}}{4H}\frac{d}{d\sigma}\left[h^3\left(1+\frac{2H^3}{3}\cdot\frac{d\frac{dh}{d\sigma}}{d\sigma}\right)\right],$$

équation aux dérivées partielles, qui régit h lorsqu'on choisit σ et t pour variables.

M. Boussinesq détermine ensuite les valeurs des composantes de u_0 de u et de w. Pour cela, il remplace dans la seconde des équations (25″) $\frac{dh}{dt}$ par sa valeur $-d\frac{hV_p}{dx}$ tirée de l'équation (29″) et V_p par sa valeur tirée de l'équation (35″). Il multiplie ensuite l'équation ainsi transformée par dx, intègre avec la condition que, pour $x=\infty$, h et ses dérivées en x deviennent nulles, et obtient ainsi la valeur suivante de u_0 :

$$(41'')\qquad u_0=\sqrt{\frac{g}{H}}\left(h-\frac{h^2}{4H}+\frac{H^3}{3}\frac{d^2h}{dx^2}\right).$$

Cette valeur de u_0 vérifie, d'ailleurs, la première des équations (25″), si l'on

se rappelle que $\frac{dh}{dt}$ est égal à $-d\frac{(hV_p)}{dx}$ d'après l'équation (29″), et que les termes du second ordre de petitesse ont leur dérivée en t à très peu près égale au produit de leur dérivée en x par $-\sqrt{gH}$.

Enfin l'analyse de M. Boussinesq l'a conduit aux expressions suivantes des composantes u et w de la vitesse :

$$(42'')\qquad \begin{cases} u=\sqrt{\frac{g}{H}}\left[h-\frac{h^2}{4H}+\left(\frac{H^2}{3}-\frac{z^2}{2}\right)\frac{d^2h}{dx^2}\right], \\ w=-z\sqrt{\frac{g}{H}}\left[\left(1-\frac{h}{2H}\right)\frac{dh}{dx}+\frac{1}{3}\left(H^2-\frac{z^2}{2}\right)\frac{d^3h}{dx^3}\right]. \end{cases}$$

Quant à la vitesse moyenne U, qui a ici pour expression

$$U=\frac{1}{H+h}\int_0^{H+h} u\,dz,$$

elle devient, en ayant égard à la valeur de u donnée par la première des équations (42″),

$$U=\sqrt{\frac{g}{H}}\left[h-\frac{H^2}{4H}+\frac{H^2}{6}\frac{d^2h}{dx^2}\right].$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par $h+H$, on voit facilement que, en ayant égard à l'équation (34″), le second membre sera sensiblement égal à hV_p, d'où l'on déduit

$$(h+H)\,U=hV_p,$$

d'où

$$(43'')\qquad U=\frac{hV_p}{H+h},$$

ou bien

$$\frac{U}{V_p}=\frac{h}{H+h}.$$

Telle est la relation fort simple qui existe entre la vitesse de débit et la vitesse de propagation. Elle renferme comme cas particulier celle que Bidone avait trouvée dans ses expériences sur la propagation des remous. En négligeant, en effet, h par rapport à H, la formule (43″) donnerait

$$UH=V_p h,$$

qui est la formule de Bidone.

133. *Mouvement du centre de gravité, énergie et moment d'instabilité de l'onde.* — Ce qui vient d'être dit suffirait, au besoin, pour analyser le mouvement des crues à affluence rapide; pour compléter les détails dans lesquels j'ai cru devoir entrer à ce sujet, je citerai encore ici quelques résultats intéressants auxquels l'analyse a conduit M. Boussinesq. Il a trouvé d'abord que (lorsqu'on néglige les frottements) le centre de gravité de l'intumescence se maintient constamment à une même hauteur au-dessus de la surface libre primitive du canal, et que sa vitesse de propagation est constante.

Chaque intumescence se caractérise essentiellement par son volume total et par son énergie, et, en désignant par Q ce volume total et par E l'énergie, M. Boussinesq en donne les expressions

$$Q = \Sigma d\sigma,$$
$$E = \Sigma h d\sigma.$$

Enfin, il trouve que le moment d'instabilité M de l'onde a pour expression

$$M = \int_{x_0}^{\infty} \left(\frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{3h^3}{H^3} \right) dx,$$

et il démontre que cette expression conserve la même valeur d'un instant à l'autre. L'onde est donc caractérisée par les trois intégrales invariables Q, E et M.

134. *Application à l'onde solitaire.* — On sait que la projection subite d'un débit fini dans un canal y produit une onde unique, qui va ensuite en se propageant très loin sans se déformer d'une manière apparente. Les premières expériences sur la vitesse de propagation de cette onde sont dues à sir Scott Russel, et M. Bazin en a fait depuis de nouvelles. M. Boussinesq a étudié de son côté cette onde caractéristique, dont la longévité dépasse de beaucoup celles de toutes les autres. Il fait remarquer tout d'abord que la conservation de sa forme entraîne immédiatement cette conséquence que les vitesses de propagation de toutes ses parties doivent être sensiblement constantes. On doit donc trouver la loi qui régit son mouvement en supposant V_p constante dans la formule (34″).

En désignant par h_1 une quantité constante telle que l'on ait

$$(53') \qquad \frac{V_p}{\sqrt{gH}} = 1 + \frac{h_1}{2H}, \text{ ou } V_p^2 = g(H + h_1),$$

la formule (34″) deviendrait

$$(54'')\qquad \frac{d^2h}{dx^2}=\frac{3h}{2H^3}(2h_1-3h).$$

En multipliant cette équation par $2\frac{dh}{dx}dx$ et intégrant de manière que $h=0$ et $\frac{dh}{dx}=0$ pour $x=\infty$, on en déduit

$$(55'')\qquad \frac{dh^2}{dx^2}=\frac{3}{H^3}h^2(h_1-h).$$

$\frac{dh^2}{dx^2}$ étant positif, il faut que h_1-h soit par conséquent positif, puisque $h=0$ pour $x=\infty$. M. Boussinesq remplace l'équation (55″) par la suivante, dont l'identité avec elle est facile à vérifier,

$$(56'')\qquad \left(\frac{d\left(\frac{h_1}{h}\right)}{dx}\right)^2=\frac{3h_1}{H^3}\cdot\frac{h_1}{h}\left(\frac{h_1}{h}-1\right).$$

Cette équation, différentiée en x, donne

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{h_1}{h}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3h_1}{H^3}\left(\frac{h_1}{h}-\frac{1}{2}\right),$$

et son intégrale est, en désignant par c et c' deux constantes arbitraires et en posant $a=\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}$,

$$\frac{h_1}{h}-\frac{1}{2}=c'\left[e^{a(x-c)}+e^{-a(x-c)}\right].$$

Cette équation vérifie l'équation (56″), à condition de poser

$$c'^2=\frac{1}{16},$$

ou

$$c'=\frac{1}{4},$$

et il vient, dès lors,

$$(57'')\qquad \frac{h_1}{h}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{4}\left[e^{a(x-c)}+e^{-a(x-c)}\right],$$

ou bien encore

$$(57''\,bis)\qquad \frac{h_1}{h}=\frac{1}{2}\left[1\pm\cos\text{hyp}\,a(x-c)\right].$$

Il faudra prendre, d'ailleurs, dans la parenthèse, au second terme, le signe supérieur + et non le signe inférieur —; car, si l'on prenait le signe —, comme un cosinus hyperbolique est toujours égal ou supérieur à l'unité, la valeur de h serait négative et elle deviendrait, d'ailleurs, infinie pour $x=c$, cas pour lequel on aurait $\frac{h_1}{h}=0$; or nulle valeur négative de h ne saurait évidemment dépasser H en valeur absolue.

L'équation (57″), résolue par rapport à l'une de ses exponentielles inverses, donnerait, d'ailleurs,

$$(57''\,ter)\qquad e^{a(x-c)}=\pm 2\left(\frac{h_1}{h}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{4\left(\frac{h_1}{h}-\frac{1}{2}\right)^2-1},$$

formule qui permettrait de calculer x pour chaque valeur de h au moyen des tables de logarithmes ordinaires.

Si l'on suppose, d'ailleurs, que l'onde marche vers les x positifs avec la vitesse de propagation V_p, l'abscisse c de son sommet sera égale à $V_p t$, si l'on compte le temps t à partir de l'instant où ce sommet passe à l'origine. L'équation (57″) deviendra celle de la surface libre, qui s'écrira

$$(58'')\qquad h=\frac{4h_1}{2+e^{a(x-V_pt)}+e^{-a(x-V_pt)}}.$$

Cette relation montre que la surface libre de l'onde, symétrique par rapport à la section normale menée par son sommet et dont l'abscisse est $x=V_p t$, s'abaisse de part et d'autre de cette section de manière à se raccorder asymptotiquement avec la surface primitive pour $x-V_pt=\pm\infty$.

Enfin la surface de l'onde est convexe aux points dont l'élévation est supérieure aux deux tiers de sa hauteur totale, et concave aux points plus bas; c'est ce que montre l'équation (54″).

La constante h_1 est, d'ailleurs, la valeur maxima de h, ainsi que cela résulte de l'équation (55″). Cette équation montre, en effet, que la dérivée $\frac{dh}{dx}$ ne s'annule que pour $h=0$ et $h=h_1$, et si l'on fait maintenant $h=h_1$ dans l'expression (53″), celle-ci donne

$$V_p=\sqrt{g(H+h)},$$

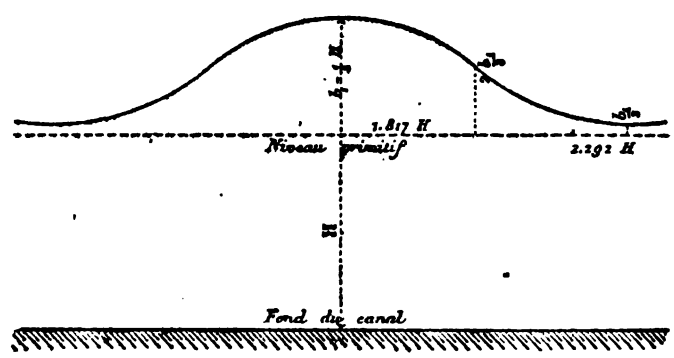
qui n'est autre chose que celle qui résulte des expériences de sir Scott Russel sur l'onde solitaire, confirmées par celles de M. Bazin.

La figure 38 donne les dispositions de l'onde solitaire calculée pour $h_1 = \frac{H}{3}$. La courbe a, de part et d'autre de l'axe, ses inflexions à l'ordonnée $\frac{2h_1}{3}$.

M. Boussinesq a, d'ailleurs, démontré que *le centre de gravité de l'onde solitaire se trouve au tiers de sa hauteur au-dessus du niveau primitif.*

Il me reste maintenant à donner quelques expressions intéressantes, aux-

Fig. 38.



quelles la belle analyse de M. Boussinesq l'a conduit pour l'onde solitaire. Si Q désigne son volume total et E son énergie, dont deux expressions ont déjà été indiquées plus haut, il trouve

$$E = \frac{Q^3}{8H^3},$$

d'où

$$Q = 2H\sqrt[3]{E};$$

on a, d'ailleurs, aussi

$$(64''\,ter)\qquad \begin{cases} h_1 = \dfrac{3\sqrt[3]{E}}{4H}, \\ \dfrac{Q}{h_1} = \dfrac{8H^2}{3\sqrt{E}}. \end{cases}$$

135. *Conséquences diverses relatives au mouvement des ondes.* — M. Boussinesq tire de ces formules diverses conséquences relatives au mouvement des ondes en général, que je ne puis mieux faire que de citer ici textuellement.

« Lorsqu'une onde se propage dans un canal dont la profondeur H est lentement décroissante d'un point à un autre, comme cela avait lieu dans les expériences de M. Bazin, le fond du canal doit réfléchir sans cesse une petite partie du mouvement de manière que le volume et l'énergie de l'intumescence

se propagent entre l'onde directe et cette onde réfléchie[1]; celle-ci étant de longueur croissante et d'une hauteur évidemment très petite, son volume deviendra fini, sans que son énergie, qui est à la fois proportionnelle à ce volume et à sa hauteur, cesse de rester très petite; l'onde directe conservera donc, à fort peu près, toute l'énergie de l'intumescence, et comme elle gardera sensiblement la forme d'une onde solitaire, sa hauteur h_1 et le rapport de son volume Q à cette hauteur s'obtiendront à un instant quelconque au moyen des formules (64″ *ter*), où E restera invariable. On voit que l'onde devient plus élevée, plus courte et, par conséquent, moins stable, jusqu'à ce qu'enfin elle manque de base et déferle. Le contraire arriverait si la profondeur allait en augmentant : alors l'onde réfléchie sera négative, mais n'aura toujours qu'une énergie négligeable, et la hauteur décroissante h_1 ainsi que le volume croissant Q de l'onde directe seraient encore donnés en chaque point par les formules (64″ *ter*). »

M. Boussinesq démontre, d'ailleurs, que de toutes les intumescences d'égale énergie, c'est l'onde solitaire qui présente la stabilité la plus grande, cette onde étant la seule qui jouisse de la propriété de rendre l'expression du moment d'instabilité M donnée plus haut un maximum et un minimum, ce qui tient à ce que cette onde est la seule qui ne se déforme pas en se propageant. M. Boussinesq fait remarquer que, « si le moment d'instabilité d'une onde dépasse assez peu sa valeur minimum, la forme de l'intumescence oscillera autour de celle d'une onde solitaire de même énergie, sans en différer jamais beaucoup; elle ne pourrait en effet s'en écarter notablement sans que le moment d'instabilité grandît, ce qui est impossible, puisque ce moment ne varie pas d'un instant à l'autre; ou plutôt, une onde solitaire se formera bientôt, car les frottements, dont nous avons fait abstraction, finissent par éteindre les oscillations de la forme effective autour de sa forme limite, tout comme ils finissent toujours par ramener à leurs positions d'équilibre stable des points matériels qu'on n'en a pas trop écartés. On conçoit même, vu l'absence de toute autre forme stable autour de laquelle une onde puisse osciller, que toute intumescence susceptible, par son volume positif et modéré, de former une onde solitaire assez peu haute pour ne pas déferler, prenne au bout d'un certain temps cette forme. Ainsi s'explique la facilité avec laquelle se produisent les ondes solitaires. »

[1] Cette réflexion des ondes est confirmée par l'expérience, et M. Bazin cite une expérience du canal de Bourgogne, constatant la réflexion d'une onde venue d'un bout d'un bief sur l'écluse d'aval et continuant ensuite en sens inverse.

« Lorsque l'intumescence est, ou positive et d'un volume considérable, ou négative, il n'existe plus de forme stable qu'elle puisse prendre. La formule (34″), qui fournit à chaque instant la vitesse de propagation de ses diverses parties, permet de prévoir la plupart des circonstances qui se présentent alors.

« Examinons d'abord le cas où l'intumescence est positive et sans fin, comme il arrive lorsqu'on verse continuellement du liquide à l'entrée d'un canal horizontal et de longueur indéfinie, ou que l'entrée d'un tel canal est constituée par un piston que l'on pousse en avant d'une manière continue. Si l'on admet, pour simplifier, que l'effusion du liquide ou le mouvement du piston soit uniforme, il est évident que l'on verra une lame liquide, dont la hauteur sera bientôt sensiblement constante, s'avancer progressivement sur l'eau tranquille du canal, et que la vitesse de propagation de cette lame, multipliée par sa hauteur, sera l'expression du volume liquide projeté en dehors ou refoulé par le piston dans l'unité de temps et par unité de largeur du canal. La courbure de cette lame étant très petite, abstraction faite des phénomènes exceptionnels que peut présenter sa tête[1], la dérivée seconde de h en x devient négligeable, et la formule (35″) donne

$$V_p^2 = g\left(H + \frac{3}{2}h\right). \tag{73''}$$

Cette formule subsiste, d'ailleurs, indépendamment des frottements intérieurs du fluide, pourvu que l'onde conserve sensiblement la même forme pendant un certain temps, et c'est au moyen du principe des quantités de mouvements établi au numéro 36 (Introduction) que M. Boussinesq le démontre.

« Si l'on considère en effet, dit-il, le volume liquide compris à l'époque t entre deux sections normales, l'une de hauteur H et menée en aval de l'onde, l'autre de hauteur $H+h$ menée en un point du canal où la courbure de la surface soit insensible, et où, les forces centrifuges étant par conséquent négligeables, la pression soit à peu près soumise à la loi hydrostatique, les actions exercées sur ce volume suivant l'axe du canal se réduiront, si les frottements

[1] Les expériences de M. Bazin ont établi, comme on l'a déjà vu au numéro 130, que la tête de l'intumescence est précédée d'une onde spéciale, mais que l'ensemble de cette intumescence s'élève à une hauteur à peu près constante au-dessus de la surface libre, ce qui justifie l'hypothèse d'une courbure très petite. M. Boussinesq explique, d'ailleurs, par la formule (34″) la formation de cette tête ainsi que la valeur $\frac{3}{2}h$ de sa hauteur moyenne. Il explique aussi, par la même formule, le dédoublement d'une intumescence, positive limitée, mais assez grosse, en plusieurs ondes solitaires, etc.

extérieurs sont négligeables, à la pression $\frac{1}{2}\rho g(H+h)^2$ exercée sur la seconde des deux sections considérées et à celle de sens contraire $\frac{1}{2}\rho g H^2$ exercée sur la première; le produit de leur somme par l'élément dt doit égaler l'augmentation de la quantité de mouvement suivant les x de ce même volume. Cette augmentation est égale à l'accroissement pendant le temps dt de la quantité de mouvement possédée suivant les x par la quantité de matière qui se trouve au delà de la seconde section, moins celle que possède le liquide étranger au volume considéré qui a traversé cette section pendant l'instant dt, et si U désigne la vitesse commune des molécules qui traversent la section, la première des quantités est $\rho U(H+h)V_p dt$, à cause de la progression $V_p dt$ de la lame dont la forme n'est pas supposée changer notablement et la seconde est évidemment $\rho U(H+h)U dt$; on a donc

$$\tfrac{1}{2}\rho g(H+h)^2-\tfrac{1}{2}\rho g H^2=\rho U(H+h)V_p-\rho U(H+h)U,$$

ou bien

$$(74'')\qquad gh\left(H+\frac{h}{2}\right)=\left(V_p-U\right)\left(H+h\right)U.$$

D'autre part, le volume fluide $(H+h)U dt$ qui traverse une section sur l'unité de largeur dans le temps dt est évidemment le même que celui $hV_p dt$ qui, au bout de ce même temps, se trouve au delà de cette section en vertu du mouvement de propagation de l'onde, et l'on a, dès lors,

$$(75'')\qquad (H+h)U=hV_p.$$

En éliminant U entre ces deux équations, on en tire

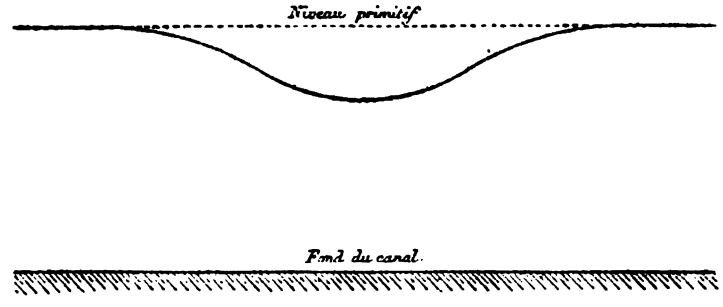
$$(76'')\qquad V_p^2=g\left(H+\frac{3}{2}h+\frac{h^2}{2h}\right),$$

formule qui se réduit à la formule (73″) lorsque le rapport de h à H est très petit. »

Passons maintenant au cas de l'onde négative, qu'il faut avant tout définir. *L'onde étant positive lorsque son sommet s'élève au-dessus du niveau primitif, elle est négative lorsque son sommet est au-dessous de ce niveau.* L'onde négative se produit, d'ailleurs, par la soustraction subite d'un certain volume d'eau, de même que l'onde positive se produit par l'addition subite de ce volume. Les expériences de M. Bazin ont établi que l'onde négative se forme d'une partie concave se raccordant en tête et en queue avec la surface libre au

moyen d'arcs convexes, comme l'indique la figure 39, mais que peu à peu elle s'allonge pour donner lieu à des ondes de hauteurs décroissantes et alternativement concaves et convexes, c'est-à-dire négatives et positives.

Fig. 39.



M. Boussinesq explique encore complètement ces propriétés de l'onde négative, et si l'on considère d'abord l'onde dans sa première forme simple, son centre de gravité sera situé à très peu près à la même hauteur par rapport à la surface libre primitive que le serait celui d'une onde positive de même hauteur, soit au tiers de la hauteur de l'onde, comme on l'a déjà vu plus haut. M. Boussinesq, en appelant ξ l'abscisse, $H+\eta$ l'ordonnée du centre de gravité, avait, *pour une onde quelconque, positive ou négative*, trouvé la formule

$$\frac{d\xi}{dt}=\sqrt{g(H+3\eta)},$$

qui donne la vitesse de propagation $\frac{d\xi}{dt}$ de ce centre.

En faisant dans cette formule $\eta=-\frac{1}{3}h$, elle devient

$$\frac{d\xi}{dt}=\sqrt{g(H-h)},$$

et l'on retombe ainsi à très peu près sur la formule donnée par M. Bazin pour la vitesse de propagation de l'onde négative, puisque le centre de gravité se trouve sur la verticale passant par le sommet de l'onde, et que c'est le passage du sommet aux divers postes d'observation qui a été seul observé dans ses expériences. « Mais la forme simple, ajoute M. Boussinesq, imprimée d'abord à la surface libre ne tarde pas à s'allonger; la formule (34″) montre en effet que, h étant négatif, les parties concaves pour lesquelles la dérivée seconde de h en x est plus grande que zéro se propagent, à hauteur égale, moins vite que les parties convexes, et que, d'autre part, les parties les plus basses de l'onde sont celles qui se propagent avec le moins de célérité. Donc

la tête de la dépression, étant plus haute que le corps et se trouvant en même temps convexe, tandis que le corps est concave, se propagera plus vite et s'allongera ainsi de plus en plus en s'aplatissant. La queue, au contraire, allant, pour la même raison, plus vite que le corps, se raccourcira sans cesse tant qu'il restera au-dessus de la surface libre et convexe. Un tel raccourcissement ne pouvant être indéfini et, d'autre part, une partie convexe étant absolument nécessaire pour le raccordement de l'onde avec la surface libre qui existe à son arrière, cette partie convexe finira par s'élever tout entière au-dessus de la surface libre primitive. Alors h étant positif, le dernier terme de la formule (34″), devenu négatif, pourra surpasser l'avant-dernier en valeur absolue d'une quantité telle que le second membre de cette formule n'y soit pas plus grand qu'aux points les plus bas de la dépression. Mais l'onde positive, ainsi produite à la suite de l'onde négative donnée, aura forcément, à son arrière, pour se raccorder avec la surface libre, une partie concave qui ne pourra pas subsister si sa vitesse de propagation est supérieure à celle de l'onde qui la précède. La vitesse de cette partie concave devant être plus petite que $\sqrt{gH}$, le second membre de l'équation (34″) montre qu'il faut absolument qu'on y ait $h < 0$, ou que l'onde positive convexe soit suivie d'une onde négative.

« En appliquant à celle-ci le raisonnement fait sur la première, on voit qu'il se formera nécessairement à la suite de l'onde négative donnée une infinité d'autres ondes alternativement positives et négatives, les unes convexes, les autres concaves, de manière que les points d'inflexion du profil longitudinal se trouveront sensiblement sur la surface libre primitive prolongée. Ces ondes auront, d'ailleurs, une énergie décroissante de l'une à l'autre, sans quoi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h^2\,dx$, dont le produit par ρg est la somme de ces énergies, ne serait pas finie et constante, comme on a vu plus haut qu'elle l'était. »

Il est impossible, comme on le voit, d'expliquer d'une manière plus complète les phénomènes que l'expérience a indiqués pour la propagation des ondes, et la formule (34″) peut, dès lors, être regardée comme celle qui régit la loi de la propagation des ondes dans un canal indéfini et de section rectangulaire constante, et pour le cas, bien entendu, où le rapport de la hauteur de l'onde à la profondeur du canal est très petit. M. Boussinesq finit en examinant ce qui résulterait du fait que l'onde négative, allant en s'allongeant sans cesse, finit par n'avoir plus de courbure appréciable, et ainsi par être tellement longue que l'on puisse la considérer comme une onde négative indéfinie, et de courbure négligeable.

Dans ce cas, l'équation (34″), dans laquelle il faut supposer nulle la dérivée seconde de h en x, devient

$$(77'') \qquad V_p = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3h}{4H}\right),$$

ce qui rend intégrable l'équation (29″) de la surface libre; on peut en effet écrire

$$(78'') \qquad hV_p = 2\sqrt{g}\left[(H+h)^{\frac{3}{2}} - (H+h)\sqrt{H}\right],$$

et l'équation (29″) devient

$$(79'') \qquad \frac{dh}{dt} + \left[3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}\right]\frac{dh}{dx} = 0,$$

dont l'intégrale serait

$$(80'') \qquad x = t.\left[3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}\right] + \psi(h),$$

ψ étant une fonction arbitraire de h. Cette équation montre que, si h ne varie pas, les accroissements de x seront égaux à ceux de t multipliés par $3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}$.

La formule (78″), en se rappelant que $U = \frac{V_p h}{H+h}$ (n° 132), donnerait

$$(81'') \qquad U = 2\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}.$$

Les formules (80″) et (81″) reproduisent exactement, comme on le voit, les formules (8) et (12) du numéro 127, auxquelles M. de Saint-Venant a été conduit pour le cas ou le rapport $\frac{h}{H}$ n'est pas petit, mais en négligeant la courbure de la surface et en supposant que U ne variait qu'avec h.

Je termine en faisant remarquer qu'il est peu de questions où la théorie et l'expérience soient plus d'accord que dans celle du mouvement par affluence rapide qui vient d'être traitée.

C'est, d'ailleurs, ici que doit s'arrêter la partie théorique de mon ouvrage, dont je vais maintenant aborder la partie pratique.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉFACE I

INTRODUCTION OU REVUE DES PRINCIPES GÉNÉRAUX DE MÉCANIQUE.

CHAPITRE Ier. — REVUE DES PRINCIPES GÉNÉRAUX DE STATIQUE.

ARTICLE 1er. — DES FORCES CONSIDÉRÉES AU POINT DE VUE DE LA STATIQUE.

1. Définition et mesure des forces 1
2. Pesanteur 3

ART. 2. — COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES.

3. Composition des forces agissant sur la même direction 4
4. Composition de deux forces concourantes 4
5. Composition d'un nombre quelconque de forces concourantes 7
6. Composition de trois forces rectangulaires 7
7. Composition de forces parallèles 8
8. Des couples et de leur composition 10
9. Moments d'une force 13
10. Composition d'un système quelconque de forces 13
11. Condition pour qu'il y ait une résultante unique 15

ART. 3. — CONDITIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE FORCES.

12. Équilibre d'un système quelconque de forces 16
13. Principe des vitesses virtuelles 17
14. Cas des forces parallèles 20
15. Centre des forces parallèles 22

ART. 4. — CAS OÙ LE SYSTÈME AUQUEL SONT APPLIQUÉES LES FORCES N'EST PAS LIBRE. EFFORTS SUR LES APPUIS.

16. Cas d'un point fixe 23
17. Cas où il y a plus d'un point fixe 24

Pages.
18. Cas du glissement sur un axe 25
19. Cas d'une surface ou d'une courbe directrice 25

ART. 5. — DES FORCES MOLÉCULAIRES.

20. Actions moléculaires 27
21. Actions moléculaires de pesanteur. Centres de gravité 28
22. Actions moléculaires d'élasticité 32
23. Expression de l'intensité des pressions 36
24. Équations indéfinies de l'équilibre des milieux 39

CHAPITRE II. — REVUE DES PRINCIPES GÉNÉRAUX DE DYNAMIQUE.

ARTICLE 1er. — DES FORCES CONSIDÉRÉES AU POINT DE VUE LE PLUS GÉNÉRAL.

25. Des forces considérées comme effets de mouvement 44
26. Principaux éléments du mouvement 45
27. Vitesse, accélération, masse 45
28. Forces rapportées à l'unité de masse 49
29. Quantité de mouvement 49
30. Composition des vitesses et des accélérations 51
31. Composition des déplacements. Mouvements relatifs 52
32. Inertie 55
33. Équations du mouvement 56

ART. 2. — PRINCIPES GÉNÉRAUX.

34. Mode de déduction de ces principes 58
35. Principe du mouvement du centre de gravité 58
36. Principe des quantités de mouvement 59
37. Principes des moments des quantités de mouvement 61
38. Principe des forces vives 62
39. Cas d'un potentiel 65
40. Séparation du travail des forces extérieures et intérieures 66
41. Application du principe des forces vives aux machines 68
42. Force vive dans le choc 69
43. Principe de la conservation du travail mécanique 76
44. Dernières considérations sur les forces vives 77
45. Principe de la moindre action 79

ART. 3. — APPLICATION DES PRINCIPES DE L'ARTICLE PRÉCÉDENT AUX CAS DE MOUVEMENT DES CORPS SOLIDES QUI PEUVENT TROUVER LEURS ANALOGIES OU LEURS APPLICATIONS DANS L'HYDRODYNAMIQUE.

46. Du mouvement uniforme 80
47. Du mouvement uniformément varié 83
48. Loi de la chute des corps pesants 85
49. Chute des corps dans le vide 86

Pages.

50. Mouvement d'un corps pesant dans le vide lorsque la direction de la vitesse initiale n'est plus verticale 91
51. Influence de la résistance des milieux sur les lois de la chute des corps pesants 95
52. Cas où la résistance du milieu est proportionnelle au carré de la vitesse 97
53. Mouvement d'un point matériel sur une courbe. — Forces centrifuge et centripète 102
54. Application des résultats du numéro 53 à un corps qui n'est sollicité que par son propre poids 108
55. Cas où l'on tient compte du frottement sur la courbe 111
56. Application au plan incliné 112
57. Mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface donnée 115
58. Application à un corps sollicité uniquement par la pesanteur 119
59. Mouvement dans un plan vertical d'un corps pesant assujetti à rester à une distance donnée d'un point fixe 120
60. Application à la détermination de l'accélération de la pesanteur 123
61. Variation de l'accélération de la pesanteur avec l'altitude et la latitude du lieu 125

ART. 4. — CONSIDÉRATIONS SUR LE MOUVEMENT COMPLET D'UN SYSTÈME RIGIDE ET INEXTENSIBLE DANS L'ESPACE.

62. Pourquoi l'on aborde cette question 131
63. Quelques détails préliminaires relatifs au mouvement de rotation 131
64. Centres et axes instantanés de rotation 132
65. Mesure et composition des rotations. — Composition des vitesses angulaires 136
66. Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe 139
67. Mouvement d'un système invariable libre dans l'espace 143
68. Cas où les forces qui sollicitent le corps en mouvement sont nulles ou en équilibre ou que leur résultante passe par son centre de gravité 148

TRAITÉ D'HYDRAULIQUE.

PREMIÈRE SECTION. — PARTIE THÉORIQUE.

CHAPITRE Ier. — HYDROSTATIQUE.

69. Définitions, propriétés générales des fluides 153
70. Équations de l'équilibre 155
71. Expression de la pression hydrostatique 157
72. Surfaces de niveau 157
73. Autres conséquences à tirer de l'équation hydrostatique 159
74. Cas d'un potentiel 160
75. Application à un fluide pesant homogène et incompressible 162
76. Mesure des pressions 165
77. Vases communiquants 166
78. Cas des fluides de densités différentes 166

Pages.

79. Pressions des fluides pesants en équilibre sur des parois solides. — Centres de pression.. 168
80. Application à un exemple..... 172
81. Équilibre d'un solide dans un milieu fluide..... 173

Chapitre II. — Hydrodynamique.

82. Subdivisions adoptées..... 178

Article 1er. — Cas de la mobilité absolue ou des fluides parfaits dans lequel il est fait abstraction du frottement.

83. Équations du mouvement..... 178
84. Conditions relatives aux surfaces limites..... 182
85. Conditions relatives à la surface libre..... 183
86. Expression de la pression..... 183
86 *bis*. Cas où il existe une fonction des vitesses..... 184
87. Filets fluides. — Hypothèse du parallélisme des tranches..... 187
88. Application à un fluide pesant..... 189
89. Application à un courant d'eau de section très petite..... 190
90. Cas où le vase reste constamment plein..... 194
91. Cas où le vase se vide..... 198
92. Principe de Toricelli..... 200
93. Expression du temps que met un vase à se vider..... 200
94. Du mouvement permanent..... 201
95. Application à un fluide pesant..... 203
96. Principe de Bernoulli..... 207
97. Valeur de la pression hydrodynamique..... 209
98. Plans de charge hydrostatique et hydrodynamique..... 210
99. Piézomètres..... 211
100. Vitesse moyenne. — Débit..... 213
101. Application de l'équation δ du numéro 95 au cas d'un courant d'eau de section quelconque..... 214
101 *bis*. Réflexions générales sur le mouvement permanent..... 216
101 *ter*. Cas particulier du mouvement uniforme..... 220
102. Écoulement de l'eau par un orifice ouvert dans la paroi d'un réservoir..... 221
102 *bis*. Forme de la veine après sa sortie d'un orifice avec charge sur son sommet..... 228
103. Écoulement de l'eau par un déversoir..... 233
104. Efforts exercés sur les parois d'un vase par un fluide incompressible en mouvement..... 236
105. Mouvement d'un corps solide dans un fluide..... 240

Art. 2. — Mouvement de l'eau en tenant compte du frottement.

§ 1er. — Analyse générale.

106. Premières indications..... 244
107. Solution approximative que l'on peut tirer de la théorie exposée à l'article 1er..... 245
108. Valeur à attribuer à F..... 249
109. Équation du mouvement uniforme, détermination de F..... 250

Pages.
110. Observation sur les lois du frottement 253
111. Solution générale en tenant compte des frottements tant extérieurs qu'intérieurs 253
112. Expression approchée de ε 259
113. Cas où les filets sont sensiblement rectilignes et parallèles. — Première conséquence importante 261
114. Conditions relatives aux surfaces limites 262

§ 2. — Du mouvement permanent ou à débit constant.

115. Équation générale du mouvement permanent 266
116. Cas de la section rectangulaire très large 268
117. Cas de la section circulaire 269
118. Application au mouvement uniforme 270
119. Formes définitives de l'équation du mouvement permanent 274
120. Extension du principe de Bernoulli 275
121. Forme donnée à l'équation du mouvement permanent par M. de Saint-Venant 276
122. Comparaison de l'ancienne et de la nouvelle théorie et conclusions définitives sur les équations du mouvement permanent 277
123. Cas où il faut tenir compte de la courbure des filets 282

§ 3. — Du mouvement non permanent ou à débit variable.

124. Mouvement non permanent dans un tuyau 284
125. Mouvement non permanent dans un canal découvert 285
126. Simplification des équations 288
127. Application à une espèce 289
128. Deux cas essentiels du régime des rivières 292

§ 4. — Régime variable par affluence lente.

129. Mouvement quasi permanent 293

§ 5. — Régime variable par affluence rapide.

130. Considérations générales 303
131. Mise en équation du problème 306
132. Vitesse de propagation 311
133. Mouvement du centre de gravité. — Énergie et moment d'instabilité de l'onde 315
134. Application à l'onde solitaire 315
135. Conséquences diverses relatives au mouvement des ondes 318

MAR 31 1888

Eng 928.62
Traite d'hydraulique :
Cabot Science 004172164
3 2044 091 965 996